MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 51}}$

Titolo nota 09/11/2007

Esempio $a_{n+1} = e^{a_n}$ $\quad a_0 = 0$

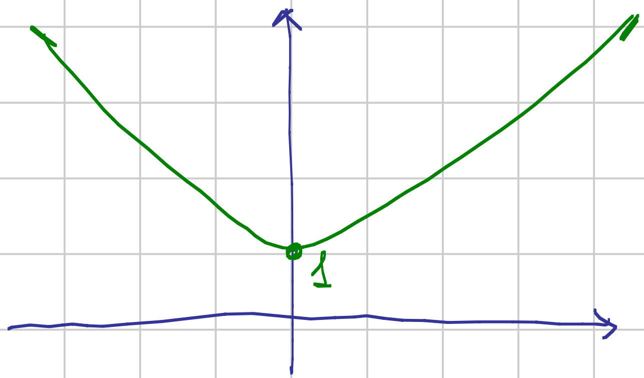
$\boxed{\text{PIANO}}$
(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $\boxed{n=0}$ è vero $\quad a_{n+1} = e^{a_n} > 0$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n \qquad e^{a_n} \overset{?}{\geq} a_n$ questo si riduce alla disequazione $e^x \geq x$

2 modi per affrontare la disequazione
1° modo: studio la funzione $f(x) = e^x - x$
2° modo: usare la disug. classica $e^x \geq 1+x$ (dimostrata a

suo tempo con Taylor - Lagrange) è vera $\forall x \in \mathbb{R}$



1° modo $\quad f(x) = e^x - x$

$f(0) = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = e^x - 1$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0 \\ = 0 & \text{per } x = 0 \\ < 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

(Commento: a dx cresce esponenzialmente, a sx cresce linearmente (anzi $y = -x$ è asint. obliquo))

Conclusione $\quad e^x - x > 0$ sempre, anzi $e^x - x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^x \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{a_n} \geq a_n$ sempre $\Rightarrow a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Segue dal (ii) e dal teo. sulle succ. monotone

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Supponiamo per assurdo che $l \in \mathbb{R}$. Allora

$$a_{n+1} = e^{a_n}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$l = e^{l}$$

ottieniamo l'eq. $l = e^{l}$, cioè

$e^{l} - l = 0 \longrightarrow$ IMPOSSIBILE perchè $f(x) = e^{x} - x$ non si annulla mai

$\Rightarrow$ l'unica poss. è $l = +\infty$

— o — o —

Esercizio 2 $\quad a_0 = 0 \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$

PIANO
(i) $0 \leq a_n \leq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \to l \in \mathbb{R}$
(iv) $l = 4$

Dim (i) $a_n \geq 0$ banale (la radice quadrata fornisce in OUTPUT solo valori ≥ 0)

Resta da dimostrare che $a_n \leq 4 \ \forall n \in \mathbb{N} \to$ INDUZIONE

$\boxed{n=0}$ $a_0 \overset{?}{\leq} 4 \qquad 0 \leq 4$ Ok

$\boxed{P.I}$ Ipotesi: $a_n \leq 4$ $\qquad$ Tesi: $a_{n+1} \leq 4$

Considero l'ipotesi e applico la funzione $f(x) = \sqrt{x+12}$

$a_n \le 4 \Rightarrow$ (Posso farlo perché $f(x)$ è strett. crescente)

$$\sqrt{a_n + 12} \le \sqrt{4+12}$$

$$a_{n+1} \le 4$$

Partendo dall'ipotesi e applicando f trovo la tesi

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ (i) + (ii) + Teo. succ. monotone

serve $a_n \le 4$ per avere limite reale

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

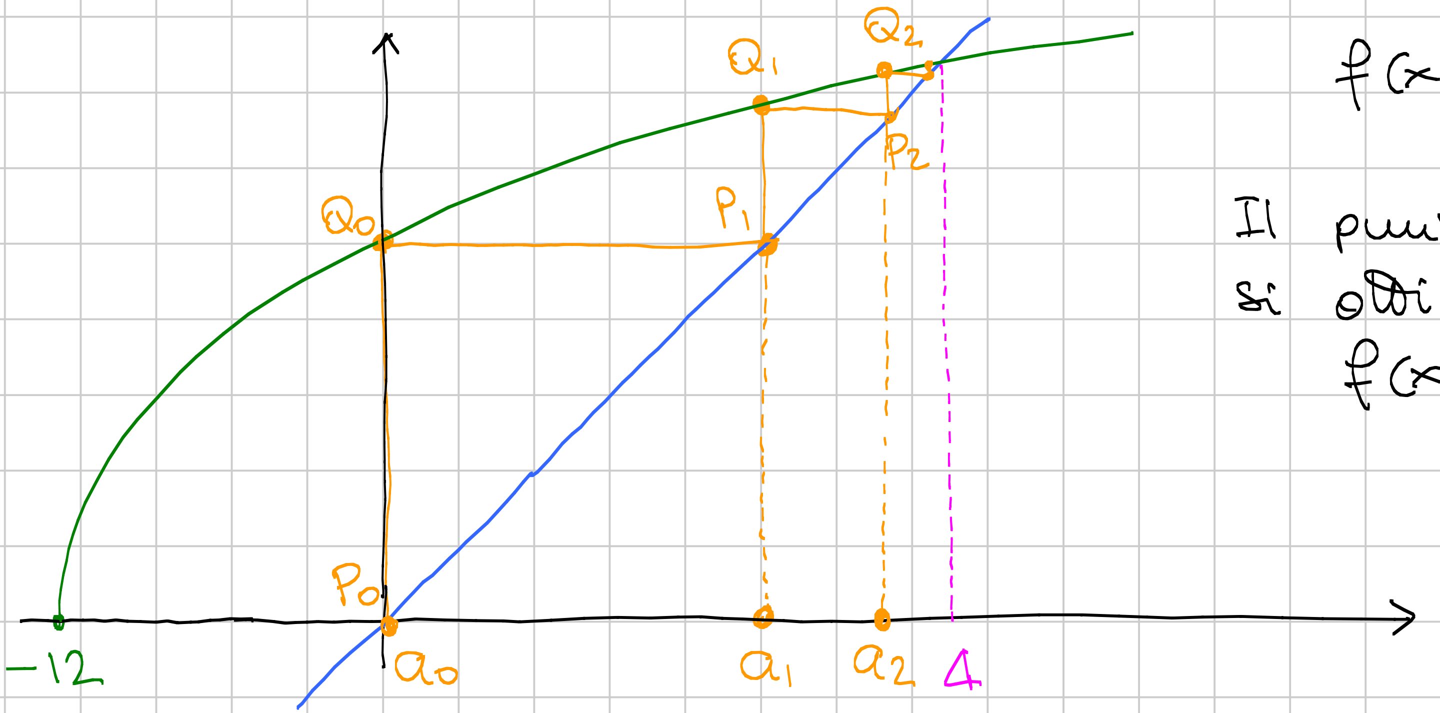
$$l = \sqrt{l + 12}$$

Devo risolvere l'eq. $l^2 = l + 12$, $l^2 - l - 12 = 0$, $(l-4)(l+3) = 0$

$l = 4$ ← UNICO POSSIBILE LIMITE

$l = -3$ ← NON ACCETTABILE COME SOL. DELL'EQ.

Interpretazione grafica della succ. per ricorrenza



$f(x) = \sqrt{x+12}$

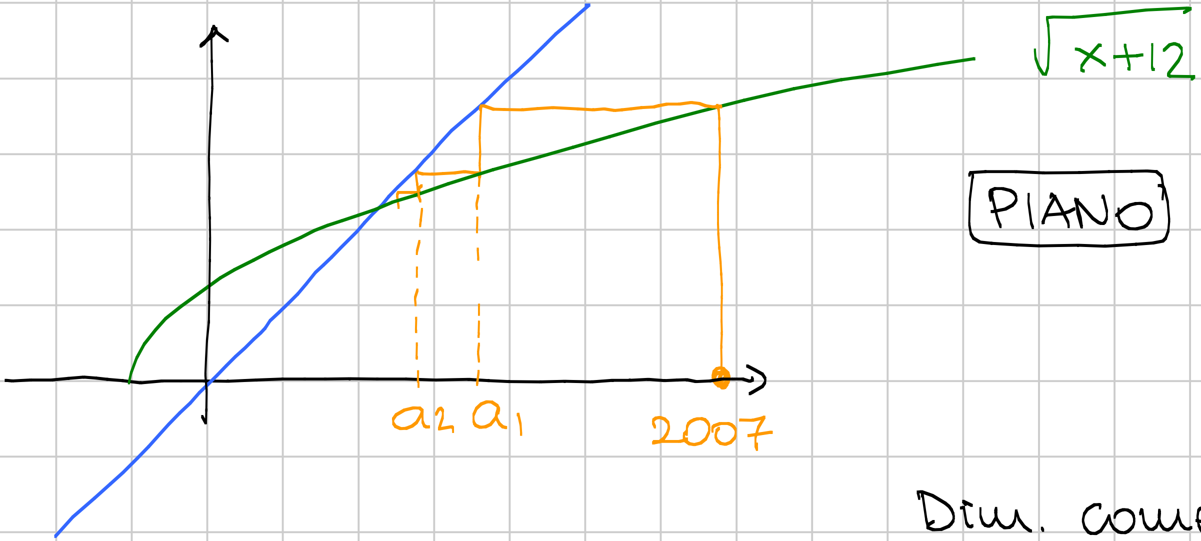
Il punto di incontro si ottiene risolvendo $f(x) = x$

SLOGAN: "verticale alla funzione, orizzontale alla bisettrice"

$P_0 = (a_0, 0)$; $Q_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$; $P_1 = (a_1, a_1)$

$Q_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$; $P_2 = (a_2, a_2)$

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ $\qquad a_{n+1} = \sqrt{a_n + 12} \qquad a_0 = 2007$



$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

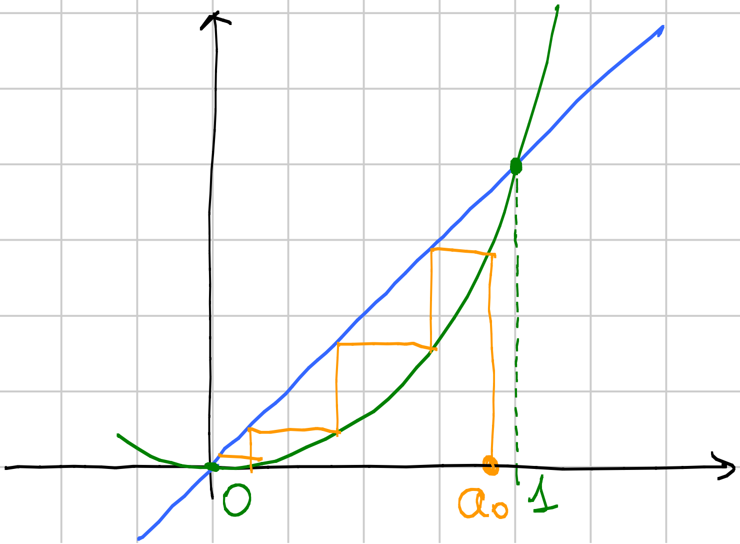
(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 4$

Dim. come prima.

<u>Esempio 4</u> $\qquad a_{n+1} = a_n^2 \qquad a_0 = \frac{99}{100}$



Permette di escludere 1 come possibile limite

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq a_n \boxed{\leq \frac{99}{100}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

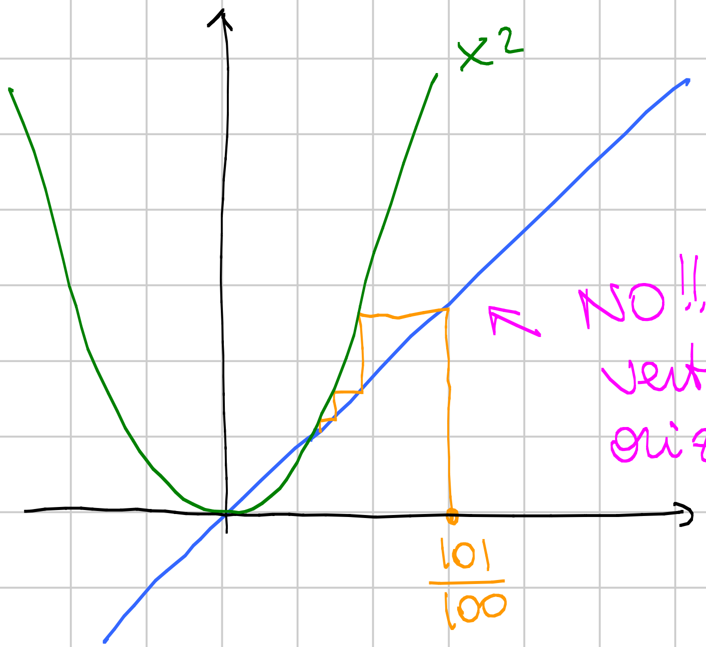
(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

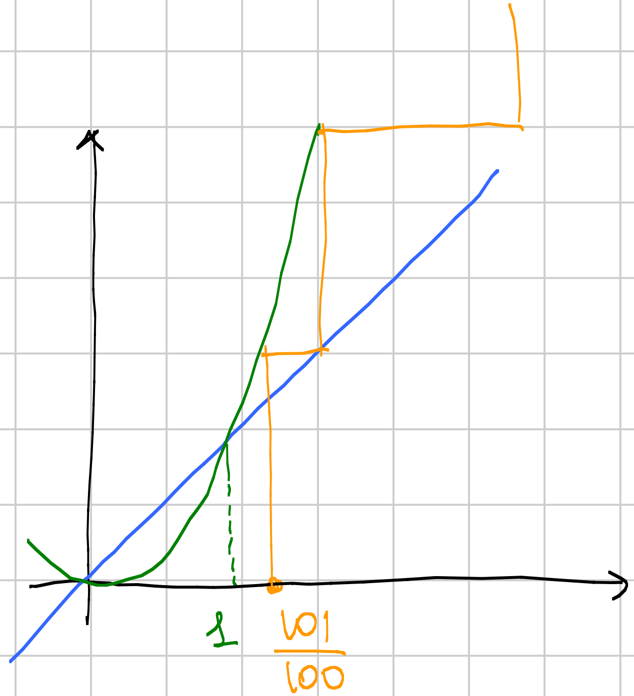
(iii) $a_n \to l \in \mathbb{R}$

(iv) $l = 0$

Esempio 5

$a_{n+1} = a_n^2 \qquad a_0 = \frac{101}{100}$





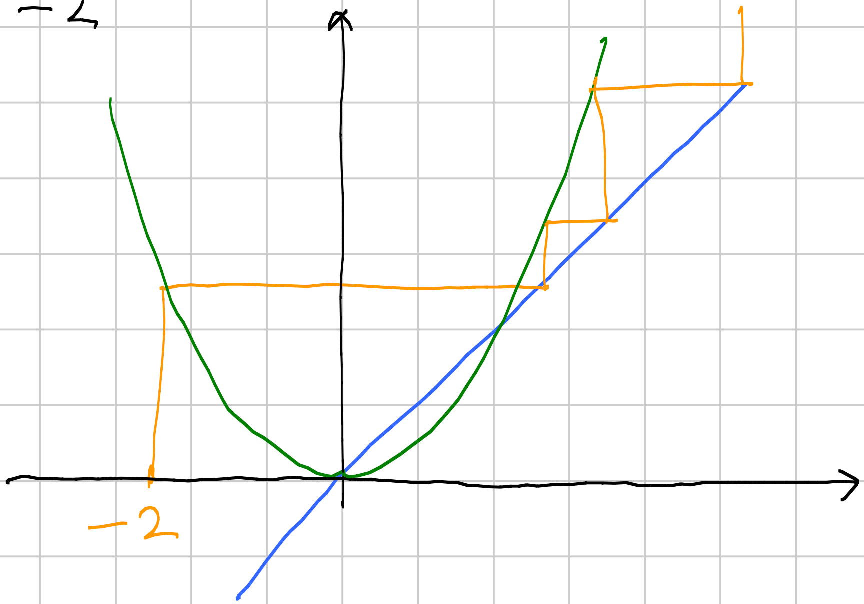
PIANO: (i) $a_n \geq \frac{101}{100} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

Esempio 6 $\qquad a_{n+1} = a_n^2 \qquad a_0 = -2$



$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \geq 1$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$