MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA } 50}$

Titolo nota 08/11/2007

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $f(x) = x\cos x$

$x\cos x = 0 \iff x = 0$ opp. $\cos x = 0$

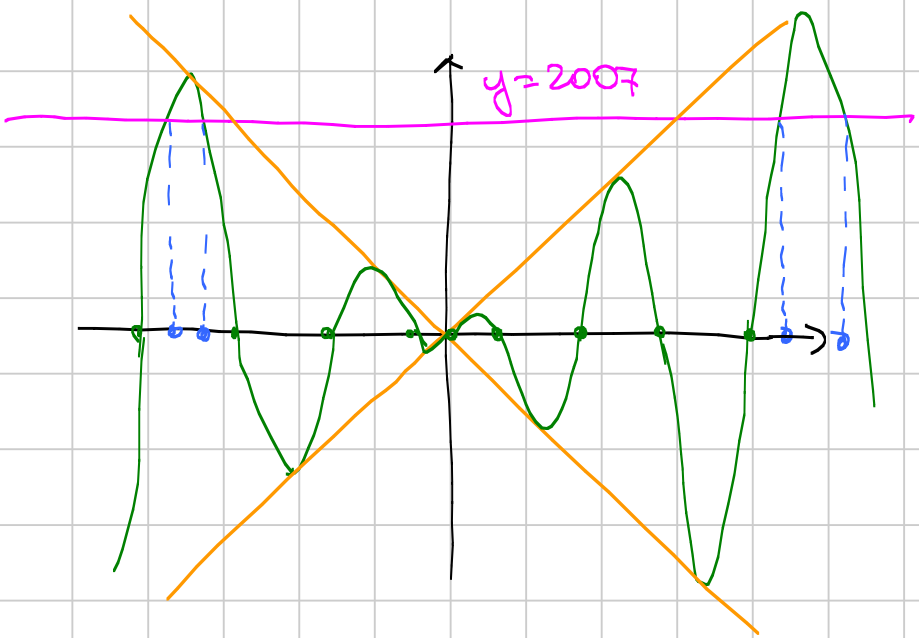
$\uparrow$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$k \in \mathbb{Z}$

$\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = +\infty$ MONDO y

$\inf\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 2007\} =$ MONDO x =



= risolvi l'eq. $x\cos x = 2007$ e prendi l'inf. delle soluz. ottenute

$= -\infty$

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $\quad f(x) = \cos x^2 \quad$ PARI $\quad f(-x) = \cos(-x)^2$

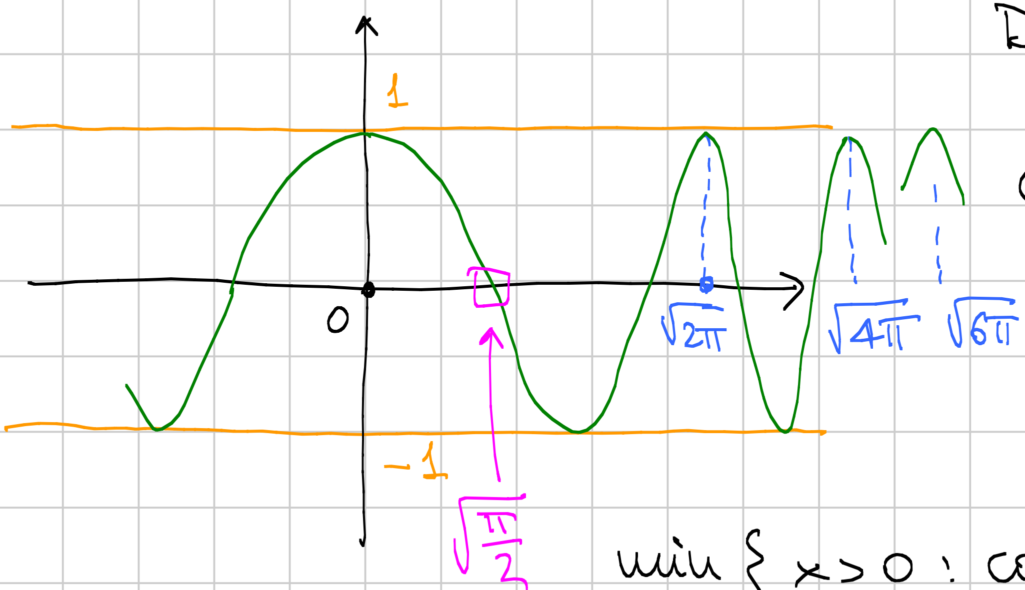
$= \cos x^2 = f(x)$

$\sup\{f(x) : x \in \mathbb{R}\} = 1$

$\max\{\quad\quad\} = 1$ $\quad$ MONDO y

$\sup\{x \in \mathbb{R} : \cos x^2 = 1\} = +\infty$ $\quad$ MONDO x

$\min\{x > 0 : \cos x^2 = 1\} = \sqrt{2\pi}$ $\quad$ MONDO x



Dove vale 1 ?

$\cos x^2 = 1 \iff x^2 = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

$x = \sqrt{2k\pi} \quad k \in \mathbb{N}$

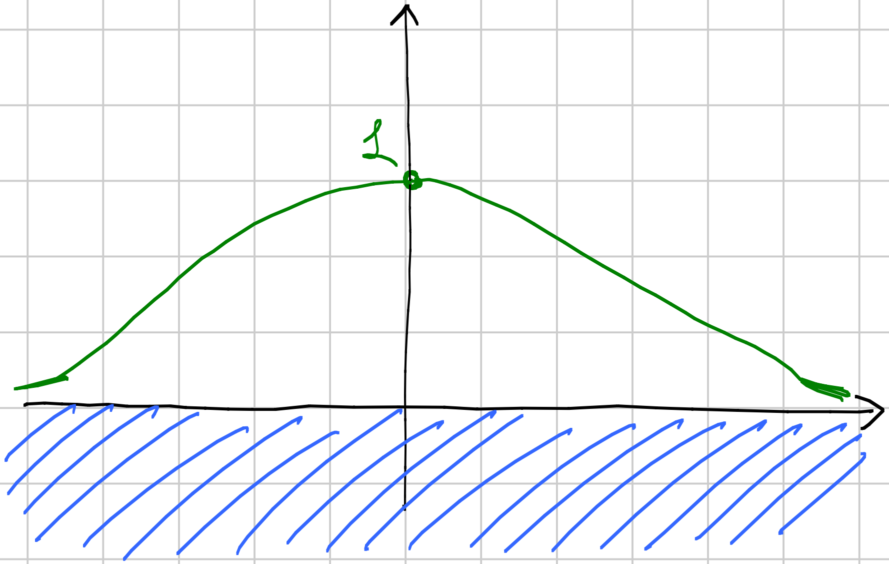
$\min\{x > 0 : \cos x^2 = \square\} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{\arctan x}{x}$

$\boxed{\text{PARI}}$

uso che arctan è DISPARI

$$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{-x} = \frac{-\arctan x}{-x} = \frac{\arctan x}{x} = f(x)$$



Problemi per $x = 0$ $\quad \lim_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$\begin{matrix}\max \\ \sup\end{matrix} \{ f(x) : x > 0 \}$

$$f'(x) = \frac{(\arctan x)' \cdot x - 1 \cdot \arctan x}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}{x^2}$$

$\Rightarrow$ il segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $\frac{x}{1+x^2} - \arctan x$

$$\underbrace{\boxed{\frac{x}{1+x^2} - \arctan x}}_{= g(x)} \geq 0$$

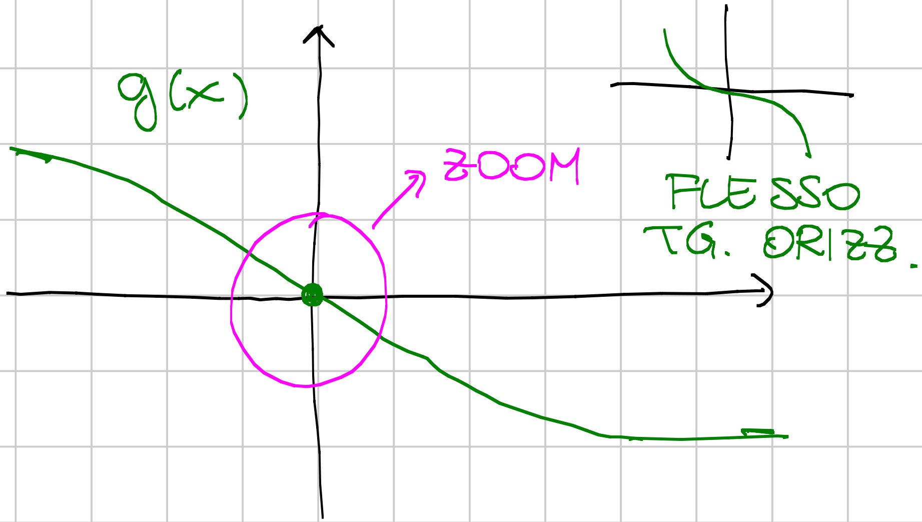
non è una diseq. elementare !

Nuovo inizio !! studio $g(x)$ DISPARI : $g(-x) = -g(x)$

$g(0) = 0$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Provo a calcolare $g'(x)$



$$g'(x) = \frac{1+x^2-2x\cdot x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{\cancel{1}-x^2-\cancel{1}-x^2}{(1+x^2)^2} = -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

$g'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ inoltre $g'(x) = 0 \iff x = 0$ (annullamento sporadico)

Monotonia 3 $\Rightarrow$ $g(x)$ strett. decrescente

$g(0) = 0$ $\nearrow$ $g(x) < 0$ per $x > 0$

$\searrow$ $g(x) > 0$ per $x < 0$

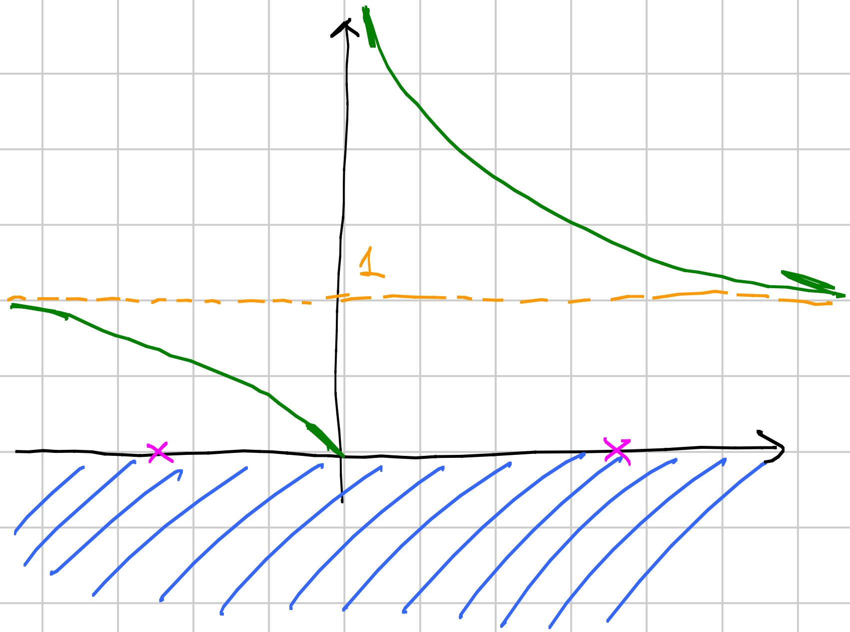
Tornando alla $f(x)$ iniziale abbiamo dimostrato che

$f'(x) < 0$ per $x > 0$ e $f'(x) > 0$ per $x < 0$,

quindi il grafico è quello disegnato all'inizio.

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 4}}$ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$



$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} e^{1/x} \leq 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = e^{0^+} = 1^+$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = e^{0^-} = 1^-$$

Errore fondamentale : $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ decrescente

ABUSIVA IN GENERALE

(vale se la zona di definizione è "senza buchi")

$f(x)$ ha problemi per $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

La zona di definizione della funzione è $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ dunque fatta da 2 pezzi:

$$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Monotonia NON abusivo: in ciascuno dei 2 pezzi la funzione è DECRESCENTE (STRETT.)

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$$

cambio $z = -y$

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{y \to -\infty} -y^2 e^y = 0$$

$y = \frac{1}{x}$

Da questo ci aspettiamo un p.to di flesso negativo.

Esercizio: confermare calcolando $f''(x)$.