MATEMATICA I

ORA 49

Titolo nota 08/11/2007

FUNZIONI LIPSCHITZIANE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f: A \to \mathbb{R}$. Si dice che f è Lip. in A con costante L se

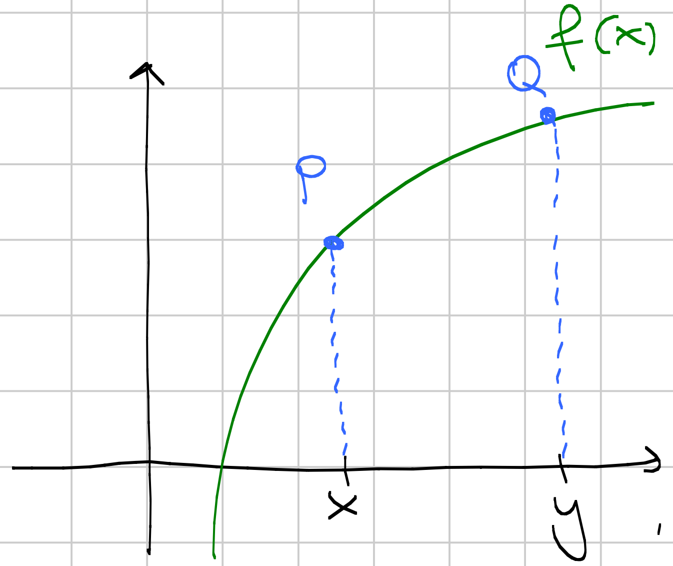
$$|f(y) - f(x)| \leq L\,|y-x| \qquad \forall x \in A \ \forall y \in A$$

— o —

Significato geom.

$$\left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \right| \leq L$$

$-L \leq$ coeff. angolare retta PQ $\leq L$



Detto brutalmente: funzione lip. $\iff$ il grafico ha pendenza limitata

$\boxed{\text{Fatto 1}}$ Sia $f(x)$ lip. e derivabile. Allora $|f'(x)| \leq L$

Dim.
$$\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right| = \left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}\right| \leq L$$

Passando al limite per $h \to 0$ si ottiene $|f'(x_0)| \leq L$

$\boxed{\text{Fatto 2}}$ Sia $f(x)$ una funzione $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.
Supponiamo $f(x)$ derivabile in (a,b) e sia

$$M = \max\{|f'(x)| : x \in (a,b)\}$$ ← supponiamo che esista

Allora $f(x)$ è lip. in $[a,b]$ con costante M.

Dim.

$$f(y)-f(x) = f'(\xi)(y-x)$$

Teo. Lagrange nell'intervallo $[x,y]$

$$\Rightarrow \quad |f(y)-f(x)| = |f'(\xi)|\cdot|y-x| \leq M|y-x|$$

sta fra x e y, dunque in particolare in (a,b)

$\Rightarrow$ f è Lip. con costante M

(in realtà basta che M sia $\sup\{|f'(x)| : x\in(a,b)\} \in \mathbb{R}$)

— o — o —

Esempio 1 $\quad f(x)=x^2 \quad$ f è lip. in $\mathbb{R}$?

Intuitivamente NO! Sappiamo che essendo f derivabile si ha

lip. $\Leftrightarrow$ derivata limitata

$f'(x) = 2x$ non è limitata su tutto $\mathbb{R}$

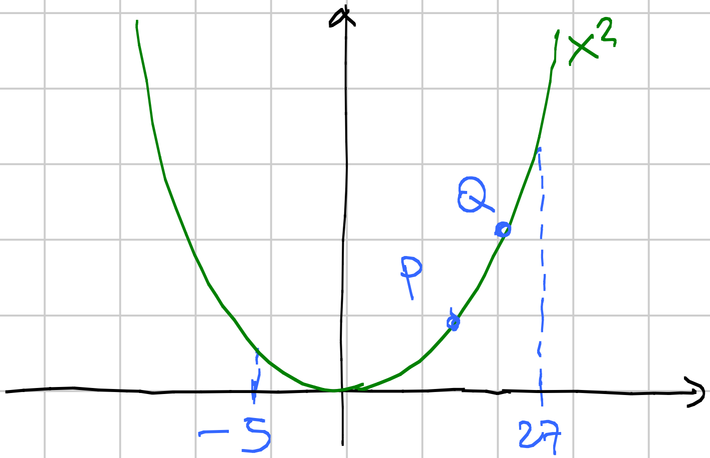
<u>Esempio 2</u> $f(x) = x^2$ f è lip. in $[-5, 27]$?

Essendo derivabile : lip $\Leftrightarrow$ derivata limitata

$f'(x) = 2x$ è limitata per $x \in [-5, 27]$

$$M = \max \{ |2x| : x \in [-5, 27] \} = 54$$

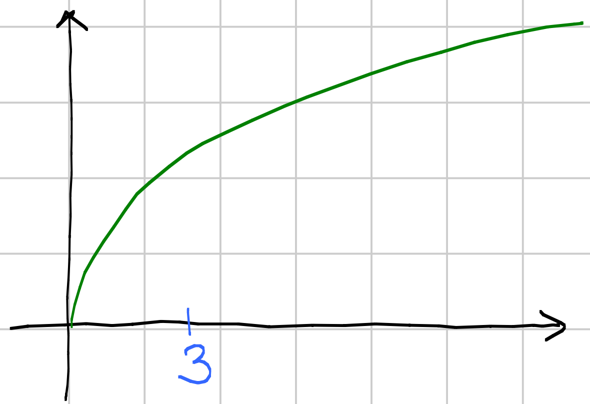
in particolare $|f(y) - f(x)| \leq 54 |y - x|$ $\forall x \in [-5, 27]$ $\forall y \in [-5, 27]$



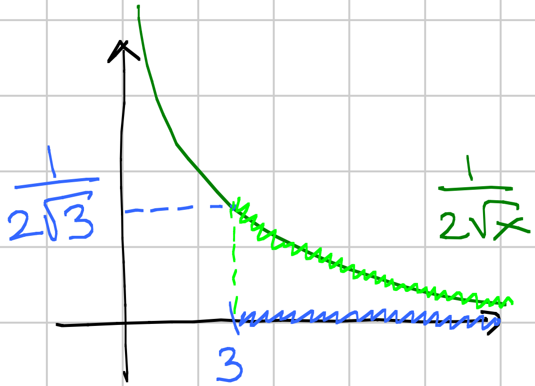
ogni retta PQ ha coeff. angolare minore di 54 e maggiore di -54

$\boxed{\text{Esempio 3}}$ $f(x) = \sqrt{x}$ f è lip. in $[3, +\infty)$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ dunque per $x \geq 3$ è limitata



$$M = \max\left\{ |f'(x)| : x \geq 3 \right\} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$



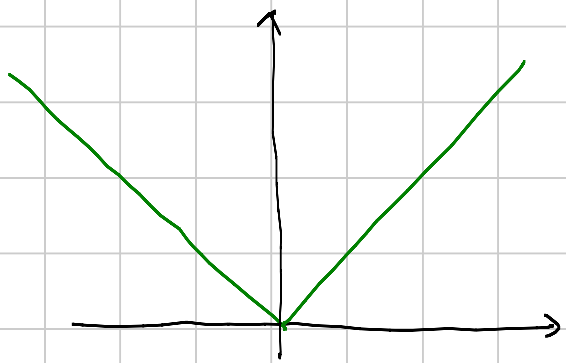
$\boxed{\text{Esempio 4}}$ $f(x) = \sqrt{x}$ è lip. in $[0,3]$? NO!

Se fosse lipschitziana la sua derivata, dove esiste, sarebbe limitata. Ma

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ non è limitata quando $x \to 0^+$

$\boxed{\text{Esempio 5}}$ $f(x) = |x|$ è lip. su $\mathbb{R}$? SI

Algebricamente si ha la disuguagl.



$$\boxed{\big|\,|y| - |x|\,\big| \leq |y - x|}$$

Proprietà del valore assoluto
(si dimostra distinguendo i casi $x \geq 0$, $y \geq 0$)

In questo caso la $\boxed{\text{costante di Lipschitz}}$ è 1.

più piccolo valore di L che va bene nella definizione

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 6}}$ $f(x) = \sin x$ è lip. su $\mathbb{R}$? SI

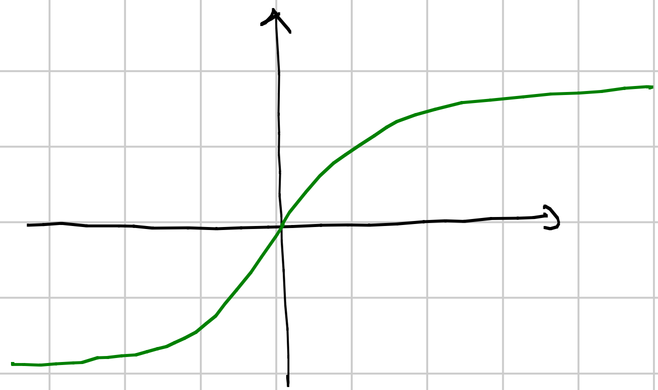
$f'(x) = \cos x$ $\qquad |f'(x)| \leq 1 \Rightarrow$ lip. con costante 1

$$\Rightarrow \quad \boxed{|\sin y - \sin x| \le |y-x|}$$

Stessa cosa per $\cos x$, quindi

$$\boxed{|\cos y - \cos x| \le |y-x|}$$

Esempio 7 $\quad f(x) = \arctan x$ è lip. su $\mathbb{R}$?

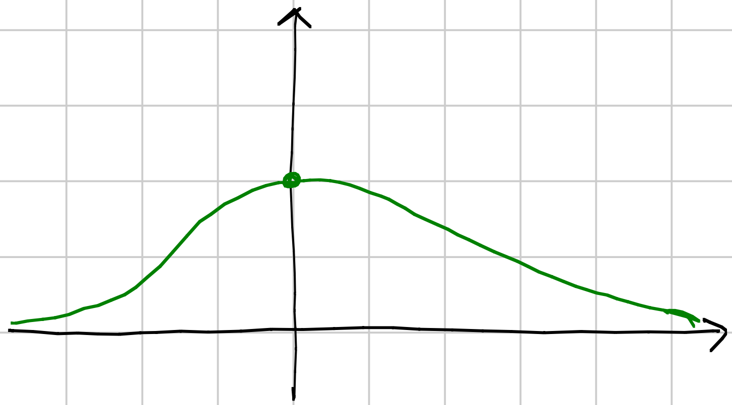


$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\sup\{|f'(x)| : x \in \mathbb{R}\} = 1$$

$$\max \quad \text{"} \quad = 1$$

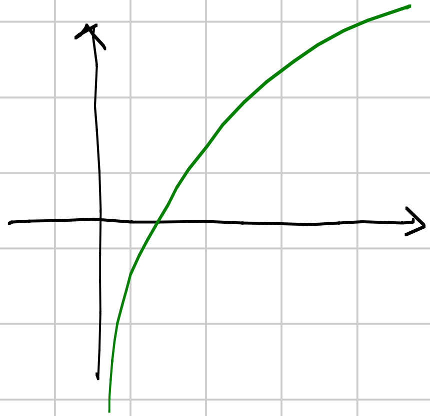
x = 0 è il p.to di max



$$\boxed{|\arctan y - \arctan x| \le |y-x|}$$

$\boxed{\text{Esempio 8}}$ $f(x) = \log x$ è Lip. in $(0, +\infty)$? NO

$f'(x) = \frac{1}{x}$ non è limitata per $x \to 0^+$

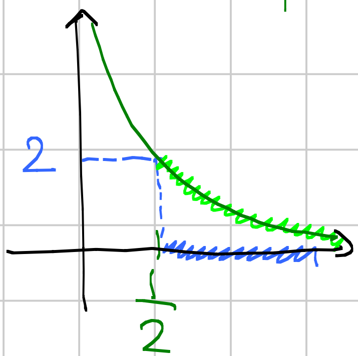


$f(x) = \log x$ è Lip. in $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$? SI

$f'(x) = \frac{1}{x}$ è limitata per $x > \frac{1}{2}$

$\max\left\{ |f'(x)| : x > \frac{1}{2} \right\}$ N.E.

$\sup \left\{ |f'(x)| : x > \frac{1}{2} \right\} = 2$



$\boxed{\text{Esempio 9}}$ $\frac{\sin x^4}{x}$ è Lip. per $x \geq 1$?

$-1 \leq \sin x^4 \leq 1$

$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x^4}{x} \leq \frac{1}{x}$

Non è lipschitziana !!!

$$f(x) = \frac{\sin x^4}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\cos x^4 \cdot 4x^3 \cdot x - \sin x^4}{x^2}$$

$$= \boxed{4x^2 \cos x^4} - \boxed{\frac{\sin x^4}{x^2}}$$

PEZZO NON LIMITATO (prendo x enorme con $\cos x^4 = 1$)

PEZZO LIMITATO per $x \geq 1$