MATEMATICA I

ORA 48

Titolo nota 07/11/2007

"Dim" Taylor-Lagrange

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ cioè}$$

$$\frac{f(x) - P_n(x)}{x^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

Chiamo $g(x) = f(x) - P_n(x)$. Si verifica "agevolmente" che

$$g(0) = g'(0) = \dots = g^{(n)}(0) = 0 \quad \text{e} \quad g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$$

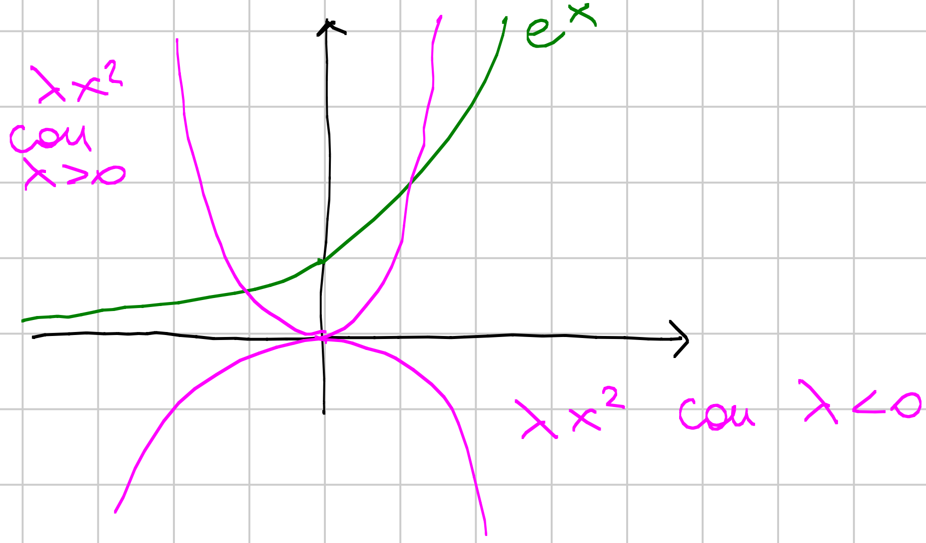
$$\frac{g(x)}{x^{n+1}} = \frac{g(x) - g(0)}{x^{n+1} - 0^{n+1}} = \frac{g'(\xi_1)}{(n+1)\,\xi_1^{\,n}} = \frac{g'(\xi_1) - g'(0)}{(n+1)\xi_1^{\,n} - (n+1)0^n} =$$

$$= \frac{g''(\xi_2)}{(n+1)\,n\,\xi_2^{\,n-1}}. \qquad \square$$

LIPSCHITZIANITÀ → Domani

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$e^x = \lambda x^2$$



Modo più corretto

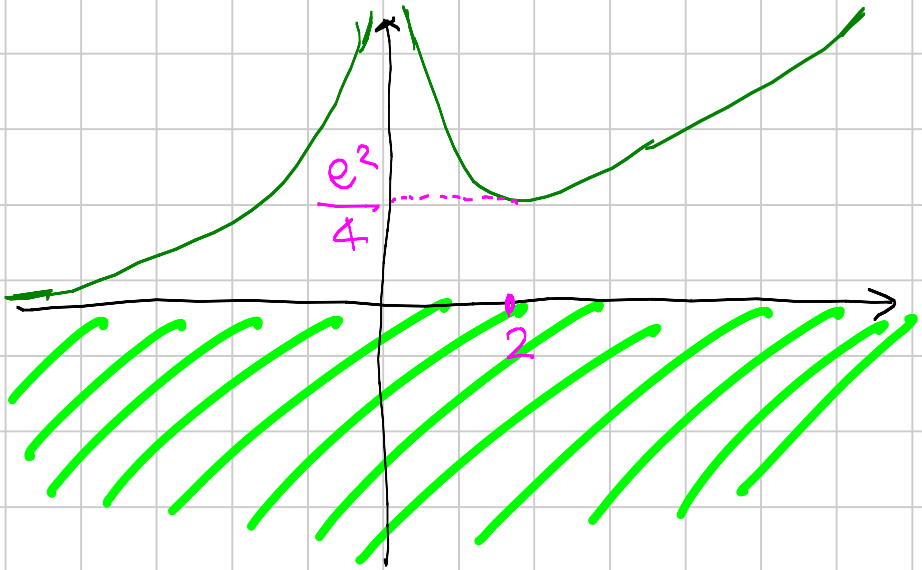
$$\underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{f(x)} = \lambda$$

Studio la funzione $f(x)$. Problemi per $x=0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$f(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

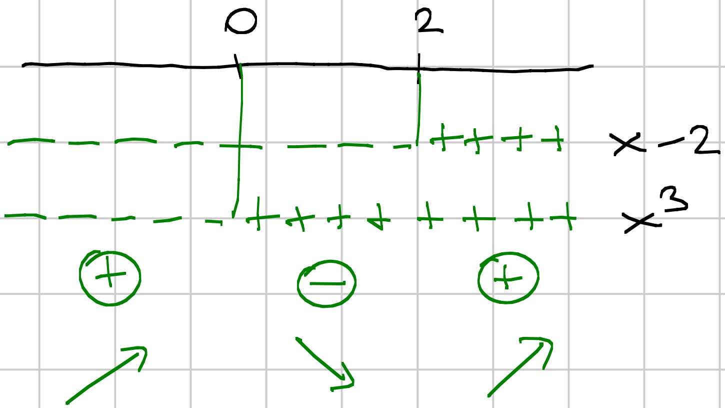


$$\lim_{x \to -\infty} = \frac{0}{+\infty} = 0$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x \cdot e^x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x \cdot x - 2e^x}{x^3} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$$

Segno di $f'(x)$ dipende dal segno di $\frac{x-2}{x^3}$



Risolvere $e^x = \lambda x^2$ è equivalente a risolvere $f(x) = \lambda$, cioè intersecare il grafico di $f(x)$ con rette // asse x

Quindi: $\lambda \leq 0 \rightsquigarrow 0$ soluz.

$0 < \lambda < \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 1$ soluz.

$\lambda = \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 2$ soluz.

$\lambda > \frac{e^2}{4} \rightsquigarrow 3$ soluz.

— o —

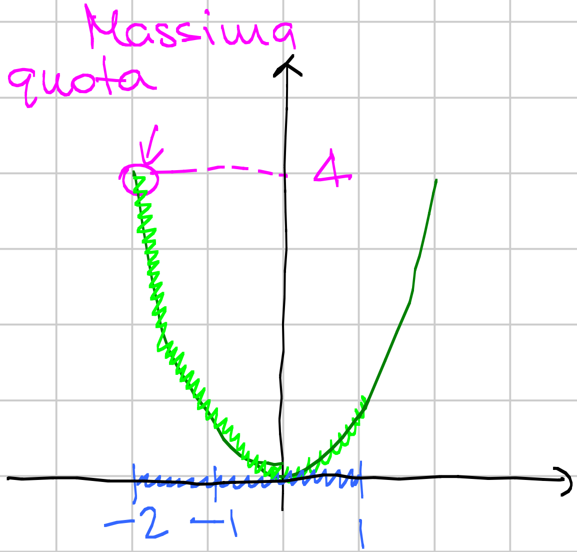
$\boxed{\text{Esercizio 2-3}}$ $\max\{x^2 : x \in [-2,1]\} = 4$ MONDO y

ELENCO

$\max\{x \in [-2,1] : x^2 \leq \frac{1}{4}\} = \frac{1}{2}$ MONDO x

PROPRIETÀ

$\mathrm{Max}\{x^2 : x \in [-2,1]\}$ = massimo valore assunto dalla funzione x^2 quando x varia in $[-2,1]$

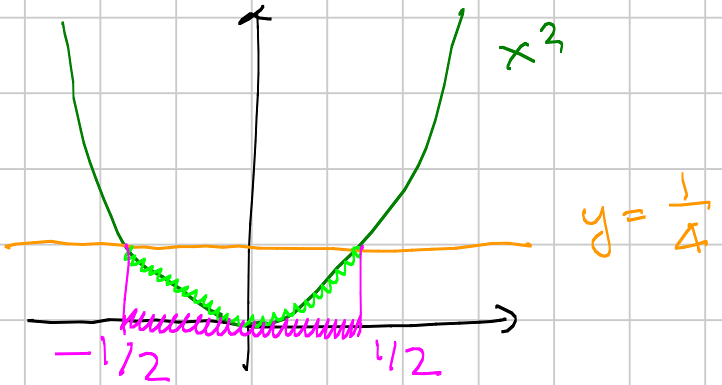


$\max\{x \in [-2,1] : x^2 \le \frac{1}{4}\}$ =

= risolvere nell'intervallo $[-2,1]$ la disequazione $x^2 \le \frac{1}{4}$. Prendere poi il max dell'insieme delle soluzioni

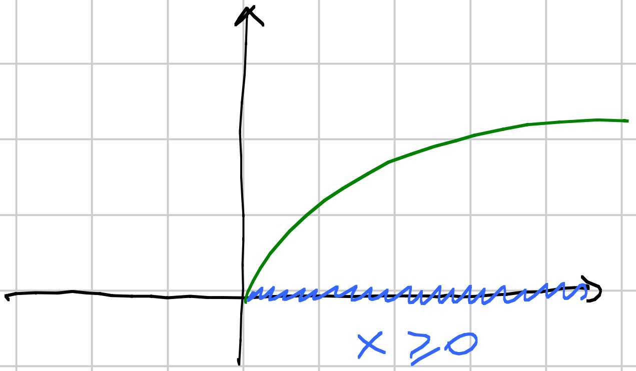
$x^2 \le \frac{1}{4}$; $x^2 - \frac{1}{4} \le 0$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \boxed{\frac{1}{2}}\right]$

Max



$\min\{\arctan x : x \geq 0\} = 0$ MONDO y

$\min\{x \in \mathbb{R} : \arctan x \geq 0\} = 0$ MONDO x

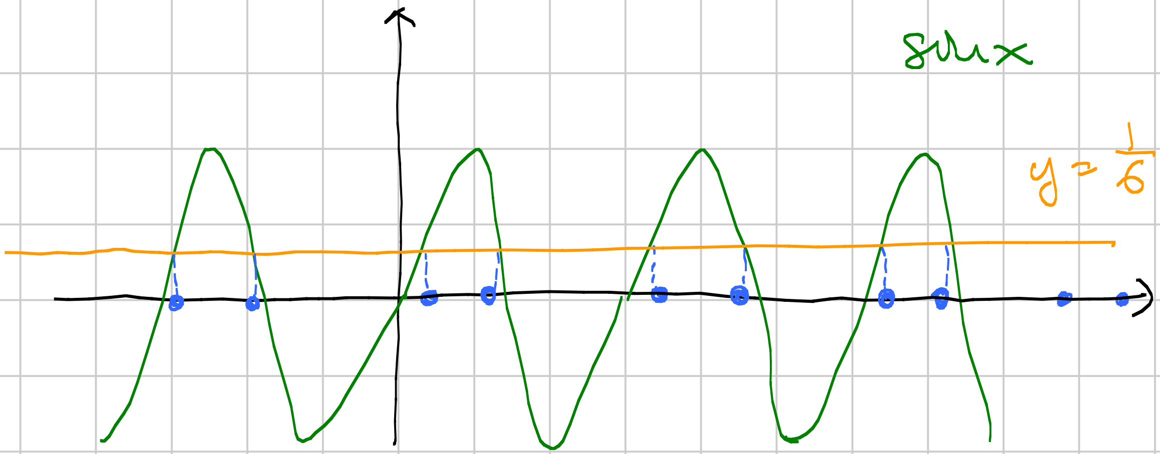


minima quota raggiunta: 0

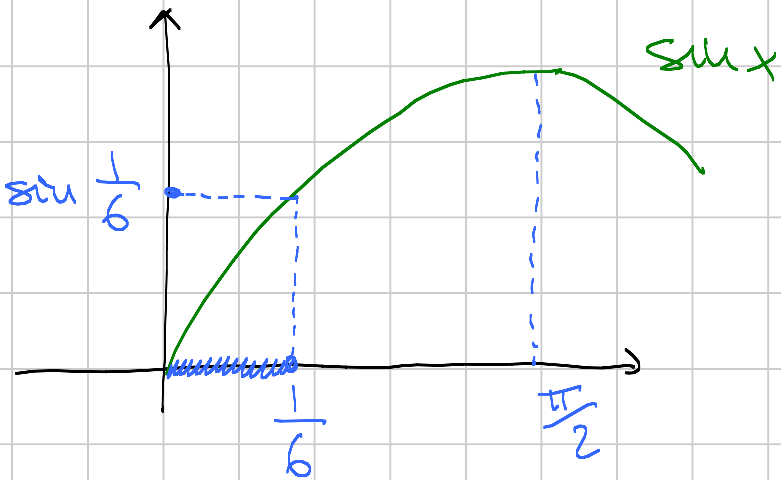
$x \in \mathbb{R} : \arctan x \geq 0$ $\longrightarrow$ risolvere la diseq. $\arctan x \geq 0$ e prendere il minimo dell'insieme delle soluzioni

$\arctan x \geq 0 \iff x \geq 0 \leadsto$ il minimo è 0

$$\sup \{ x \in \mathbb{R} : \sin x = \tfrac{1}{6} \} = +\infty$$ MONDO x



$$\sup \{ \sin x : 0 \le x \le \tfrac{1}{6} \} = \sin \tfrac{1}{6}$$ MONDO y



è anche Max

In questo caso max e min esistono per W

$$\sup \{ \underbrace{x^8 - \log(1+x^6) + \sin x^7}_{f(x)} : x \in \mathbb{R} \} = +\infty \qquad \text{MONDO } y$$

Basta vedere che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Domanda: esiste $\min \{ x^8 - \log(1+x^6) + \sin x^7 : x \in \mathbb{R} \}$?

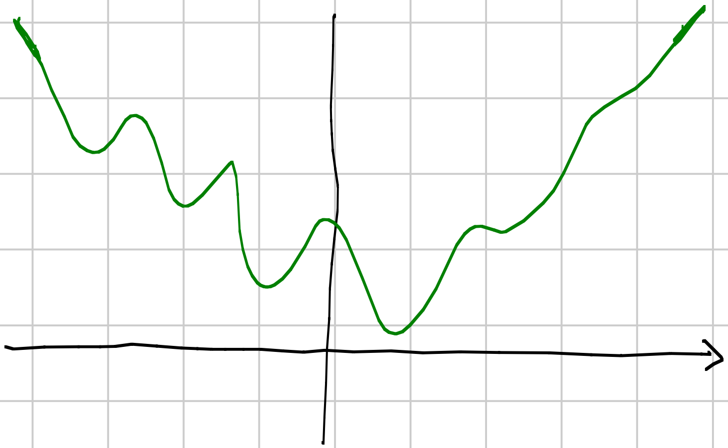
<u>Non posso</u> applicare W perché non sono su un intervallo $[a,b]$

Per dimostrare che il minimo esiste, basta osservare che

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

+ f continua



$$\max\left\{ n \in \mathbb{N} : \underbrace{n^2 \le 7n+2}_{\downarrow} \right\} = 7$$

risolvere su $\mathbb{N}$

$n=0$ vera $n=1$ vera $n=2$ V $n=3$ V .. $n=7$ V

$n=8$ FALSA

$$\max\left\{ n \in \mathbb{N} : \left| e^n - \sin n! \right| (17-n^2) \ge 0 \right\} = 4$$

$$\min\left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \overbrace{\arctan(7x+e^x)}^{f(x)} \le \lambda \quad \forall x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{\pi}{2}.$$

MODO STRANO DI CHIEDERE IL MAX (ANZI IL SUP)
DELLA $f(x)$