SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$$a_n = \frac{n+4}{n^2+5}$$ ← FORMULA ESPLICITA

$\underbrace{a_0 = 2}_{}$ ↑ VALORE INIZIALE

$\underbrace{a_{n+1} = 3a_n - 1}_{}$ ↑ LEGGE PER CALCOLARE I VALORI SUCCESSIVI

$a_1 = 3a_0 - 1 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

$a_2 = 3a_1 - 1 = 3 \cdot 5 - 1 = 14$

$a_3 = 3a_2 - 1 = 3 \cdot 14 - 1 = 41$

$\vdots$

$a_0 = 2$

$\underbrace{a_{n+1} = 3a_n + n}_{}$ ↑ LA LEGGE DI PASSAGGIO CAMBIA DI VOLTA IN VOLTA

USO LEGGE CON $n=0$ ↓

$a_1 = 3a_0 + 0 = 3 \cdot 2 + 0 = 6$

$a_2 = 3a_1 + 1 = 19$

$a_3 = 3a_2 + 2 = 59$

$\vdots$

UNA SUCC. PER RICORRENZA SI DICE $\boxed{\text{AUTONOMA}}$ SE LA n compare solo come indice.
Si dice NON AUTONOMA altrimenti

$$a_{n+1} = \arctan(a_n) + e^{a_n}$$

AUTONOMA

$$a_{n+1} = a_n^2 + \sin(n a_n)$$

NON AUTONOMA

$$a_{n+1} = 3a_n + 5a_{n-1}$$

In questo caso servono 2 condizioni iniziali per poter partire

$a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3a_1 + 5a_0 = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 0 = 6$

$a_3 = 3a_2 + 5a_1 = 3 \cdot 6 + 5 \cdot 2 = 28$

Una succ. per ricorrenza si dice $\boxed{\text{DI ORDINE K}}$ se un termine dipende dai k termini precedenti

L'ultimo termine era di ordine 2.

Ci limitiamo alle succ. per ric. di ordine 1

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

$\leftarrow$ ricorrenza

$\leftarrow$ termine iniziale

CASO AUTONOMO

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n, n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

CASO NON AUTONOMO

Domanda: calcolare il limite di a_n per $n \to +\infty$.

— o —

Esempio 1 $\quad a_0 = 1, \quad a_{n+1} = 3a_n$

In questo caso si riesce a trovare la formula esplicita.

$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 27, \quad \dots, \quad \boxed{a_n = 3^n}$

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$

si dimostra per induzione

$a_n = 3^n \Rightarrow a_{n+1} = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$

$a_n \to +\infty$

Esempio 2 $\quad a_1 = 0 \qquad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$

$a_2 = a_1 + 1 = 1, \quad a_3 = a_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

$a_4 = a_3 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

In generale $\quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$

In questo caso a_n è una somma parziale della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Poichè la serie diverge, le somme parziali, cioè a_n tendono a $+\infty$.

$\boxed{\text{Esempio VERO 1}}$ $a_0 = \frac{1}{2}$ $a_{n+1} = a_n^2$

Volendo si può ricavare la formula esplicita per a_n.

$a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{16}$, $a_3 = \frac{1}{16^2} = \frac{1}{256}$

SEMBRA che a_n sia decrescente e $a_n \to 0$.

$\boxed{\text{PIANO PER DIMOSTRARLO}}$

(i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Dal punto (i) e dal punto (ii) sappiamo che a_n è monotona decrescente e limitata dal basso. Dal teo. sulle succ. monotone segue subito che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (non può essere $a_n \to -\infty$ perché $a_n \geq 0$ sempre)

$\boxed{\text{Dim. (iv)}}$

$$a_{n+1} = a_n^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$\ell = \ell^2$$

$\nearrow$ $\ell = 0$ ← UNICA POSSIBILITÀ

$\searrow$ $\ell = 1$ ← INCOMPATIBILE CON $a_n \leq \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Devo dim. che $a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n$, cioè

$$a_n^2 \overset{?}{\leq} a_n \qquad a_n^2 - a_n \overset{?}{\leq} 0 \qquad a_n(a_n - 1) \overset{?}{\leq} 0$$ VALORI INTERNI

Vera se $0 \leq a_n \leq 1$ ← VERA se ho dimostrato il punto (i)

$\boxed{\text{Dim. di (i)}}$ PER INDUZIONE

$\boxed{n=0}$ $0 \leq a_0 \leq \frac{1}{2}$ $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$ OK.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Ipotesi: $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ Tesi: $0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

Dim. prendo l'ipotesi e applico il quadrato (posso farlo conservando i versi perché x^2 è deb. cresc. per $x \geq 0$)

$$0^2 \leq a_n^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2},$$

cioè la tesi del passaggio induttivo.

— o — o —

$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $a_0 = 2$ $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$

$a_0 = 2$ $a_1 = 2^2 + 2 = 6$ $a_2 = 6^2 + 6 = 42$

$\boxed{\text{PIANO}}$
(i) $a_n \geq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(ii) $a_{n+1} \geq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$
(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Per il p.to (ii) la succ. è deb. cresc.
Quindi $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
(abbiamo la limitazione solo dal basso)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$

$$\begin{array}{ccccc} a_{n+1} & = & a_n^2 & + & a_n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \ell^2 & + & \ell \end{array} \rightsquigarrow \ell = 0$$

SUPPONIAMO $\ell \in \mathbb{R}$

NO, INCOMPATIBILE CON (i)

l'unica possibilità è $\ell = +\infty$ $\leftarrow$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n$ $a_n^2 + a_n \overset{?}{\geq} a_n$

$a_n^2 \geq 0$ sempre vera !!!

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Per induzione

$\boxed{n=0}$ immediato

$\boxed{\text{P.I.}}$ ipotesi: $a_n \geq 2$ tesi: $a_{n+1} \geq 2$

Dim prendo l'ipotesi $a_n \geq 2$

$$a_{n+1} = \underbrace{a_n^2}_{\geq 0} + a_n \geq a_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{uso Hp.}}}{\geq} 2 \quad \leftarrow \text{TESI}$$