# MATEMATICA I

**ORA 43**

Titolo nota 31/10/2007

$\boxed{C \Rightarrow H}$ Ipotesi $x_0 \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ del tipo $\frac{0}{0}$

Tesi $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

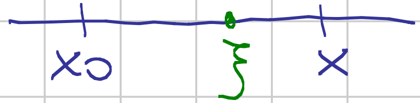
Se la forma indeterminata è del tipo $\frac{0}{0}$, "vuol dire" che $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$

Applico CAUCHY alle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo $[a,b] = [x_0, x]$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \; ; \quad \frac{f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x_0)}}}{g(x) - \underbrace{g(x_0)}_{=0}} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dove sta $\xi$ ?




Se cambio il punto $x$, chiaramente cambia anche il punto $\xi$, ma sempre rimane fra $x_0$ e $x$. Quindi a rigor di logica dovrei scrivere

$\xi$ dipende da $x$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} = $$

cambio variabile $y = \xi_x$
Quando $x \to x_0$, ho che $\xi_x = y$ tende a $x_0$ (carab.)

$$= \lim_{y \to x_0} \frac{f'(y)}{g'(y)}$$

Questo dimostra il caso $\frac{0}{0}$ con $x_0 \in \mathbb{R}$.

— o — o —

$\boxed{L \Rightarrow M}$ $\boxed{\text{Monotonia 2}}$ (segno della derivata in un intervallo)

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile in $(a,b)$. Allora

$\boxed{1}$ $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ strett. crescente in $[a,b]$

$\boxed{2}$ $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ debolm. crescente in $[a,b]$

$\boxed{3}$ $f$ deb. cresc. in $[a,b] \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$\boxed{4}$ $f$ strett. cresc. in $[a,b] \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$ NOO!!!!

<u>Esempio</u> $f(x) = x^3 \quad [a,b] = [-1,1]$

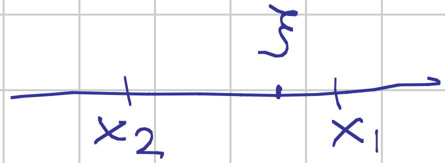
$f(x)$ è strett. crescente in $[-1,1]$

$f'(x) = 3x^2$ è $\geq 0$, ma non $> 0$
perchè si annulla per $x = 0$.

Dim $\boxed{1}$ Ipotesi : $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

Tesi : $f$ strett. crescente in $[a,b]$, cioè

$$x_1 > x_2 \implies f(x_1) > f(x_2)$$




Per Lagrange : $\underbrace{f(x_1) - f(x_2)}_{\downarrow} = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{+} \underbrace{f'(\xi)}_{+}$

deve essere $> 0$

quindi $f(x_1) > f(x_2)$

$\boxed{2}$ $\underbrace{f(x_1) - f(x_2)}_{\downarrow} = \underbrace{(x_1 - x_2)}_{>0} \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}$

deve essere $\geq 0$

quindi $f(x_1) \geq f(x_2)$, cioè $f$ è debolmente crescente

$\boxed{3}$ Ipotesi: $f$ debolm. cresc.
Tesi: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Se $f(x)$ è debolmente crescente, tutti i rapporti incrementali sono $\geq 0$ (in quanto num. e denom. hanno stesso segno (il num. può anche essere 0))

Ma allora $f'(x_0)$, essendo limite di roba $\geq 0$, sarà per forza $\geq 0$.

" $\boxed{4}$ Se $f(x)$ è strett. crescente, tutti i rapp. increm. sono $> 0$ (il num. non si annulla mai)

Ma allora $f'(x_0)$, essendo il limite di roba $> 0$ sarà solo $\geq 0$ (le disug. strette NON PASSANO al limite)

$\boxed{\text{Esercizio 1}}$ Determinare quante sono le soluzioni dell'equazione

$$3x = \sin(2x) + 2007$$

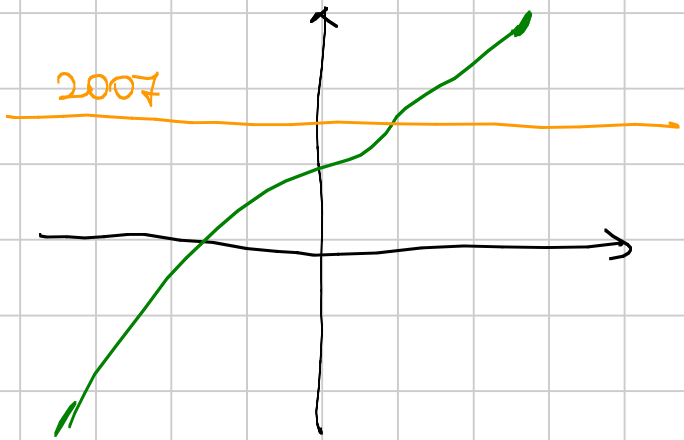
Considero la funzione $f(x) = 3x - \sin(2x)$. L'eq. data si riduce a

$$f(x) = 2007$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Per il teo. di esistenza degli zeri (o sua variante) si ha che $f(x)$ è surgettiva

$\Rightarrow$ l'eq. data ha almeno una soluzione



Se $f(x)$ fosse iniettiva, la soluz. sarebbe unica.
Se $f(x)$ fosse strett. cresc., allora $f(x)$ sarebbe iniettiva
Se $f'(x)$ fosse sempre $>0$, allora per Monotonia 2
$f(x)$ sarebbe strett. cresc.

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ strett. cresc. $\Rightarrow f$ iniettiva $\Rightarrow$ sol. unica

$$f'(x) = 3 - 2\cos(2x) \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ è iniettiva.

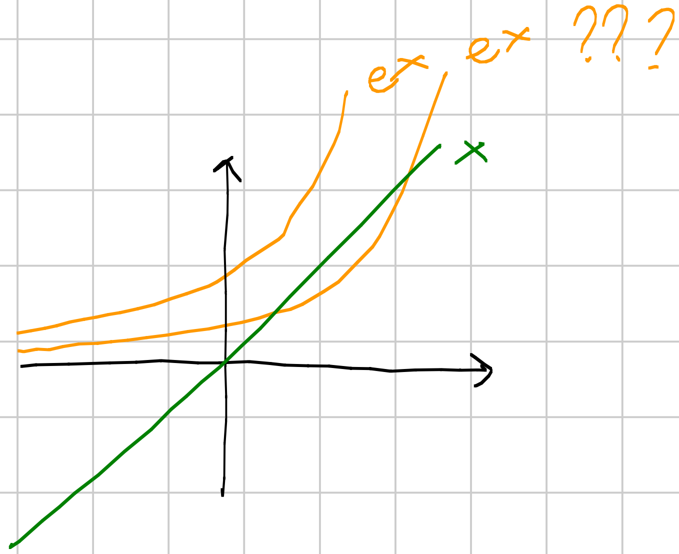
Conclusione: la funzione $f(x) = 3x - \sin(2x)$ è iniettiva e surgettiva.

Quindi $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'eq. $f(x) = \lambda$ ha

esattamente una soluzione.

**Esercizio 2** Determinare, al variare del parametro $\lambda$, il numero di soluz. dell' eq.

$$x = \lambda e^{x}$$

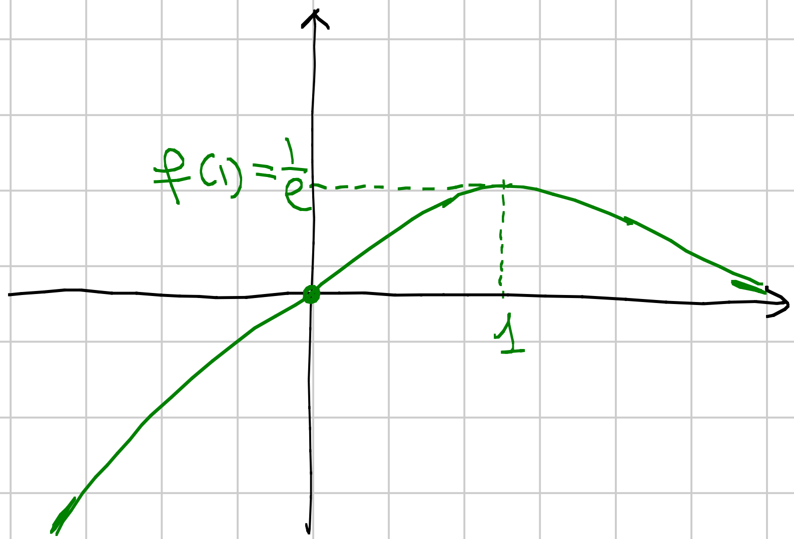



**Soluz.** Modo sbagliato :

Modo migliore :
$$\underbrace{\boxed{x e^{-x}}}_{= f(x)} = \lambda$$

$$f'(x) = e^{-x} - x e^{-x}$$
$$= e^{-x}(1-x)$$

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x < 1 \nearrow \\ = 0 & \text{per } x = 1 \\ < 0 & \text{per } x > 1 \searrow \end{cases}$$

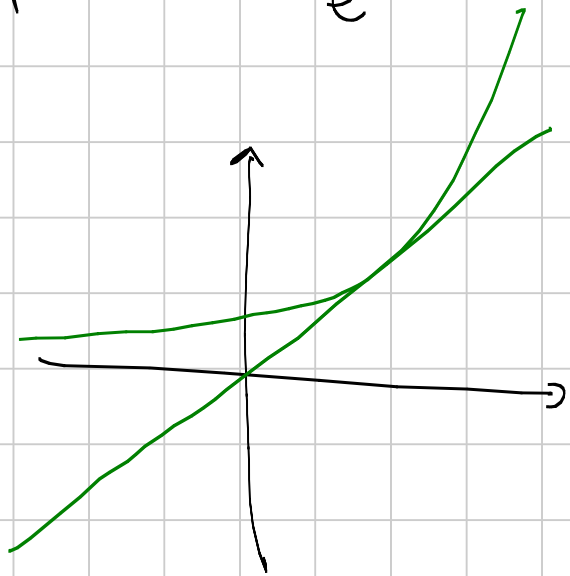


Conclusione: l'eq. ha

0 soluz. per $\lambda > \frac{1}{e}$

1 soluz. per $\lambda \leq 0$ e per $\lambda = \frac{1}{e}$

2 soluz. se $0 < \lambda < \frac{1}{e}$



Caso $\lambda = \frac{1}{e}$.