MATEMATICA I

ORA 42

Titolo nota 31/10/2007

Giustificazione della ricerca dei candidati p.ti max / min.

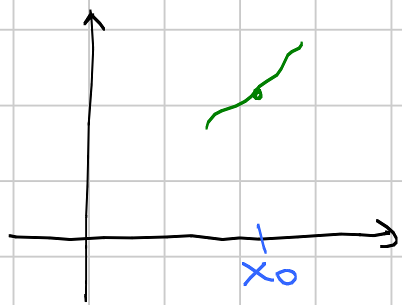
MONOTONIA 1

(Segno della derivata in un punto)

Sia x_0 un punto all'interno di un intervallo (a,b).
Supponiamo che $f'(x_0) > 0$ (dunque esiste)
(negli altri punti di (a,b) non so nemmeno se la f' esiste)
Allora esiste $\delta > 0$ tale che

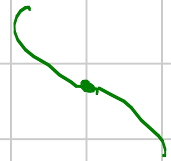
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$ un po' dopo vale di +

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$$ " " prima " " "



Analogamente: supponiamo $f'(x_0) < 0$. Allora $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$
$$f(x) > f(x_0) \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$$



— o — o —

Oss. NON ho mai detto che f è monotona in $(x_0-\delta, x_0+\delta)$

— o — o —

Conseguenza di monotonia 1. Supponiamo che $x_0 \in (a,b)$ INTERNO sia un p.to di max per $f(x)$ in $[a,b]$. Allora

* NON PUÒ ESSERE $f'(x_0) > 0$ (se fosse così avremmo che $f(x) > f(x_0)$ un po' a dx di x_0, quindi $f(x_0)$ non sarebbe il max)
* NON PUÒ ESSERE $f'(x_0) < 0$ (se fosse così avremmo che $f(x) > f(x_0)$ un po' a sx di x_0, quindi $f(x_0)$ NO max)

Quindi per $f'(x_0)$ restano solo 2 possibilità

↗ NON esistere → SING. INTERNO

↘ $f'(x_0) = 0$ → STAZ. INTERNO

Il ragionamento per i p.ti di min. è lo stesso.

Dim. di monotonia 1 Ipotesi $f'(x_0) > 0$, cioè

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Quindi per h vicini a 0, cioè $h \in (-\delta, \delta)$, si ha che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Per $h > 0$ il den. è > 0, quindi num > 0, cioè $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, cioè $f(x_0+h) > f(x_0)$

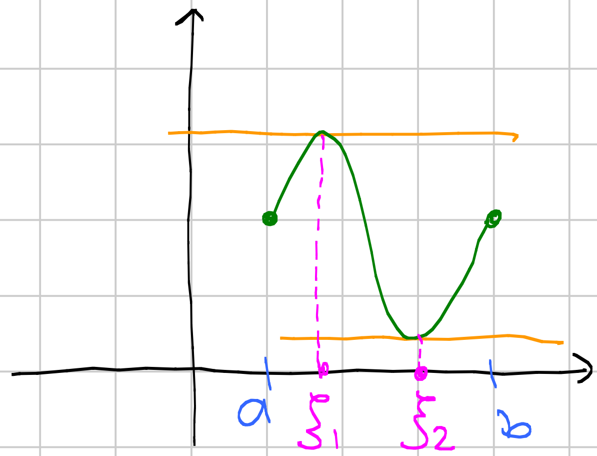
Per $h < 0$ il den. è < 0, quindi num. < 0, cioè $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$, cioè $f(\underbrace{x_0+h}_{\text{punto un po' a sx di } x_0}) < f(x_0)$

TEOREMA DI ROLLE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Supponiamo che

(i) f continua in $[a,b]$;
(ii) f derivabile in (a,b); (se è deriv. in $[a,b]$ meglio!!)
(iii) $f(a) = f(b)$

Allora $\exists\, \xi \in (a,b)$ t.c. $f'(\xi) = 0$



Disegno: esiste almeno un p.to ξ in cui $f' = 0$, cioè la retta tangente è // asse x

Oss. ξ può non essere unico

Dim: basta prendere un p.to di max o di min. interno. Per W Max e min esistono, ma potrebbero essere assunti sul bordo. Poichè $f(a) = f(b)$ se max e min. sono sul bordo, vuol dire che f è costante $\Rightarrow f' = 0$ ovunque.

TEOREMA DI CAUCHY Siano $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$

Supponiamo che (i) f e g continue in $[a,b]$;
(ii) f e g derivabili in (a,b).

Allora $\exists\, \xi \in (a,b)$ t.c. $(g(b)-g(a))f'(\xi) = (f(b)-f(a))g'(\xi)$.

Se inoltre supponiamo che (iii) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo si ottiene

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Dim. Considero la funzione

$$\varphi(x) = \underbrace{(g(b)-g(a))}_{\text{Numero}} f(x) - \underbrace{(f(b)-f(a))}_{\text{Numero}} g(x)$$

Allora (i) φ è continua in $[a,b]$

(ii) φ è derivabile in (a,b)

(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$ (fare per esercizio la verifica)

$\Rightarrow$ φ soddisfa le ipotesi di Rolle $\Rightarrow \exists\, \xi$ t.c. $\varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi'(\xi) = (g(b)-g(a))f'(\xi) - (f(b)-f(a))g'(\xi) = 0$$

Se aggiungiamo l'ipotesi che $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$ allora

- possiamo dividere per $g'(\xi)$
- $g(b) \neq g(a)$: se per assurdo fosse $g(a) = g(b)$, allora potrei applicare Rolle alla funzione $g(x)$ e troverei un punto in cui $g' = 0$, ma abbiamo supposto che non esista.

— o — o —

TEOREMA DI LAGRANGE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tale che
(i) f continua in $[a,b]$
(ii) f derivabile in (a,b).

Allora $\exists\, \xi \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)}$$

Dim: applico Cauchy con $g(x) = x$ (Nota bene $g'(x) = 1 \neq 0$ in (a,b))

Per Cauchy $\exists\, \xi \in (a,b)$ t.c.

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \leftarrow 1$$

cioè

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(\xi)}{1}$$

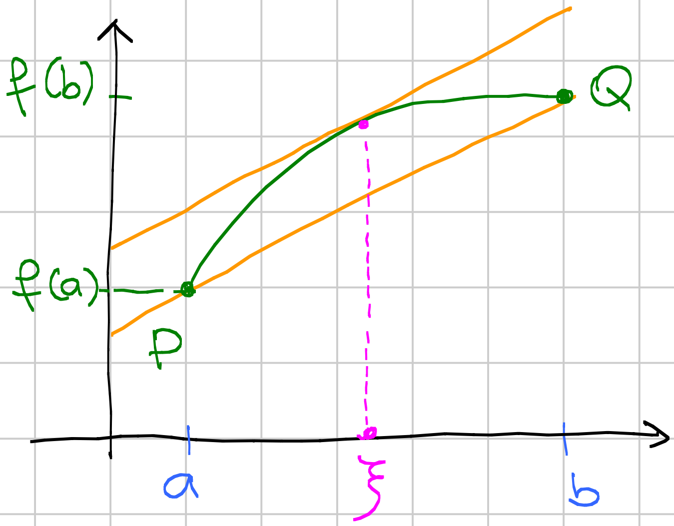
Moltiplico per $b-a$ e ottengo la tesi. $\square$

Interpretazione geometrica

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} = \boxed{f'(\xi)}$$

coeff. angolare retta PQ

coeff. angolare retta tg al grafico in ξ

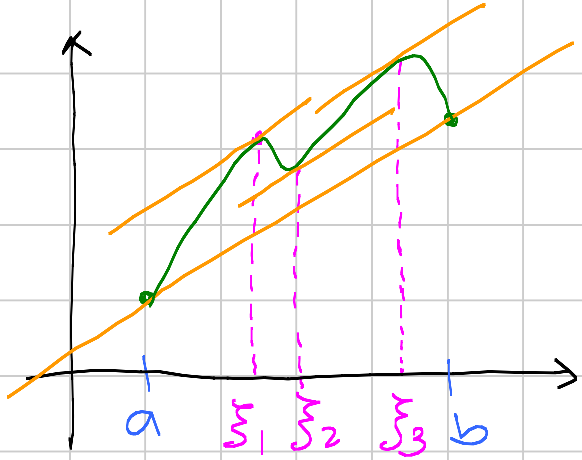


Stesso coeff. angolare = le 2 rette sono parallele.

$\boxed{\text{Lagrange geometrico}}$ $\exists\, \xi \in (a,b)$ in cui la retta tangente è // alla retta PQ

<u>N.B.</u> ξ non è obbligato ad essere unico

Rolle non è altro che la versione del teo. di Lagrange in cui PQ è // asse x



Questo NON autorizza a dimostrare ROLLE usando LAGRANGE !!!