MATEMATICA I

ORA 41

Titolo nota 31/10/2007

TEOREMI SU FUNZIONI CONTINUE E DERIVABILI

INDICE:

$$\begin{array}{ccccccc} W & \Rightarrow & R & \Rightarrow & C & \Rightarrow & L \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & H & & M \\ & & & & \boxed{\Downarrow} & & \\ & & & & T & & \end{array}$$

WEIERSTRASS — Già vista

ROLLE

CAUCHY

LAGRANGE

HÔPITAL

TAYLOR

MONOTONIA (legami tra segno della derivata e monotonia di una funzione)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$

Def. Si dice che $M \in \mathbb{R}$ è il massimo di f in A, e si scrive

$$M = \max \boxed{\{ f(x) : x \in A \}}$$

→ insieme dei valori assunti da $f(x)$ quando x varia in A. È l'immagine di A, cioè $f(A)$

se (i) $f(x) \leq M \quad \forall x \in A$

(ii) $\exists\, x \in A$ t.c. $f(x) = M$

Def. analoga Si dice $m = \min \{ f(x) : x \in A \}$ se

(i) $f(x) \geq m \quad \forall x \in A$

(ii) $\exists\, x \in A$ t.c. $f(x) = m$

Oss 1 Max e min NON sono obbligati ad esistere.
Se esistono sono unici

Oss 2 M e m sono "delle y", cioè valori assunti dalla funzione

Def. Supponiamo che esista $M = \max\{f(x) : x \in A\}$.
Allora tutti i punti $x \in A$ t.c. $f(x) = M$ sono detti PUNTI DI MASSIMO
Idem per i p.ti di minimo.

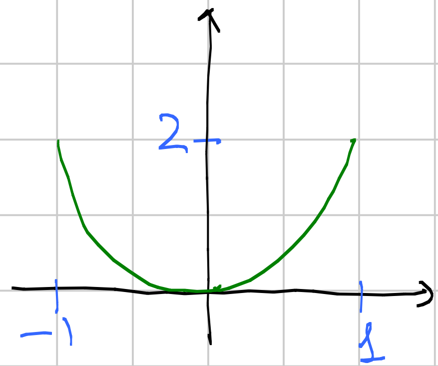
$\boxed{\text{Oss. 3}}$ Se M esiste, allora per forza esiste almeno un punto di massimo, ma questo può non essere unico.
Idem per il minimo.

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 2x^2$

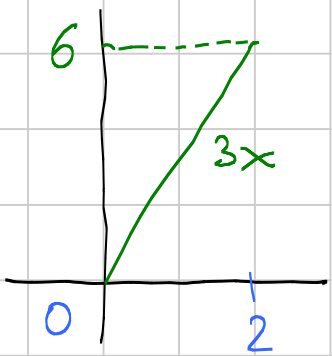
$\max\{x^2 : x \in (-1,1)\} = $ N.E.

$\min\{x^2 : x \in (-1,1)\} = 0$

punto di minimo : $x = 0$



$\boxed{\text{Esempio 2}}$ $f : (0,2] \to \mathbb{R}$ $f(x) = 3x$



$\max\{3x : x \in (0,2]\} = 6$ ← Valore (asse y)

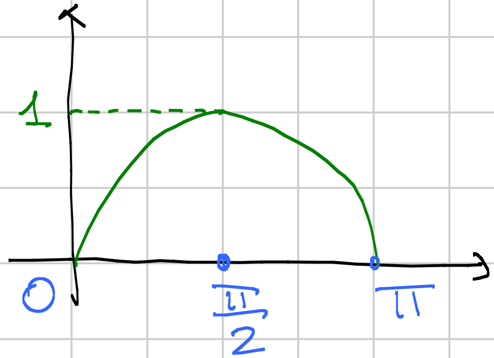
punto di max : $x = 2$ ← punto in cui il valore è raggiunto (asse x)

$\min\{3x : x \in (0,2]\} =$ N.E. $\sup\{3x : x \in (0,2]\} = 6$

$\inf\{3x : x \in (0,2]\} = 0$

— o —

Esempio 3 $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sin x$



$\max\{\sin x : x \in [0,\pi]\} = 1$

sup " $= 1$

p.to di max : $x = \frac{\pi}{2}$

$\min\{\sin x : x \in [0,\pi]\} = 0$ p.ti di minimo :

inf " $= 0$ $x = 0, \quad x = \pi$

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Sia $f : \boxed{[a,b]} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione $\boxed{\text{CONTINUA}}$

intervallo compresi
gli estremi

Allora $\max_{\min} \{ f(x) : x \in [a,b] \}$ ESISTONO

— o — o —

<u>Oss.</u> Se manca almeno una delle ipotesi (cioè f non è continua, o non stiamo considerando un intervallo con estremi), max e min possono ugualmente esistere.

Nell' esempio 3 precedente avremmo potuto applicare W.

Supponiamo di essere nelle ipotesi di W. Quindi max e min esistono. Come calcolarli?
Occorre trovare i CANDIDATI ad essere i p.ti di max / min
Questi stanno in una delle seguenti 3 categorie di p.ti

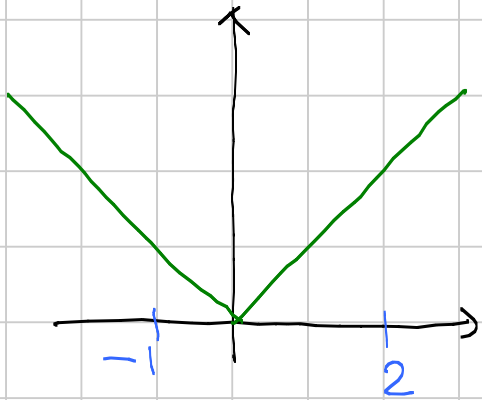
$$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

1. P.ti STAZIONARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ t.c. $f'(x) = 0$
2. P.ti SINGOLARI INTERNI : p.ti $x \in (a,b)$ in cui $f'(x)$ NON esiste

   (N.B. se f' esiste ovunque, questa categoria è $\emptyset$)
3. P.ti del BORDO : $x = a$, $x = b$

Operativamente: si determinano i candidati dei 3 tipi, poi si sostituiscono nella funzione e si cercano il valore + alto e + piccolo.

__Esempio 4__ $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |x|$



$$\max \{ |x| : x \in [-1, 2] \} = 2$$
$$\min \{ |x| : x \in [-1, 2] \} = 0$$

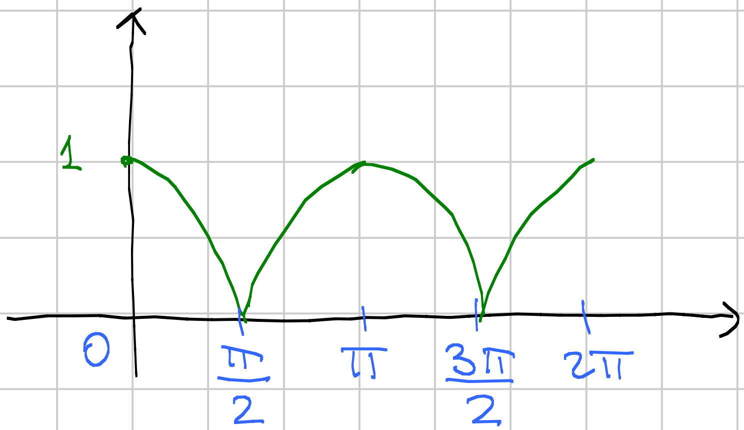
max e min esistono per W.

p.to di max : $x = 2$ (categoria BORDO)

p.to di min : $x = 0$ (categoria SINGOLARE INTERNO)

$\boxed{\text{Esempio 5}}$ $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = |\cos x|$

Max e min esistono per W



$$\max \{ |\cos x| : x \in [0, 2\pi] \} = 1$$
$$\min \{ |\cos x| : x \in [0, 2\pi] \} = 0$$

p.ti di max: $\nearrow x=0$ BORDO
$\rightarrow x=\pi$ STAZIONARIO INTERNO
$\searrow x=2\pi$ BORDO

p.ti di min: $\nearrow x=\frac{\pi}{2}$ SINGOLARE INTERNO
$\searrow x=\frac{3\pi}{2}$ " "

<u>Esempio 6</u> $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ $f(x)=x^2-x^3$

W $\Rightarrow$ max e min esistono. Cerco i candidati ad essere p.ti di max / min.

Bordo: $x=0$ e $x=1$
Singolari interni: $\emptyset$ ($f'(x)$ esiste ovunque)
Stazionari interni: cerco $x\in(0,1)$ t.c. $f'(x)=0$

$$f'(x)=2x-3x^2=0 \qquad x(2-3x)=0 \begin{array}{l}\nearrow x=0\\ \searrow x=2/3\end{array}$$

$x = 2/3$ è l'unico stazionario interno ($x=0$ è stazionario ma non interno)

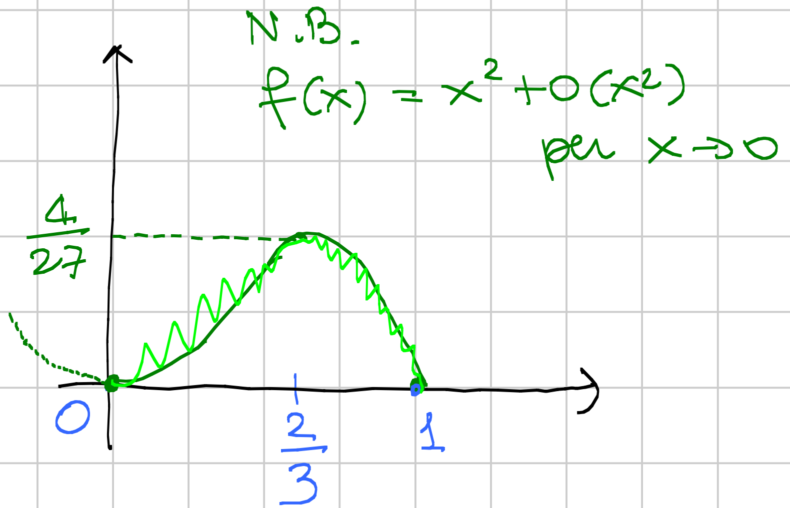
I candidati sono quindi: $x=0$, $x=1$, $x=2/3$

Confronti i valori assunti dalla funzione

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f\left(\tfrac{2}{3}\right) = \frac{4}{9} - \frac{8}{27} = \frac{4}{27}$$



Conclusioni:

$$\max\{x^2 - x^3 : x \in [0,1]\} = \frac{4}{27} \qquad \text{p.to di max: } x = \frac{2}{3}$$

$$\min\{x^2 - x^3 : x \in [0,1]\} = 0 \qquad \text{p.ti di min.} \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$