MATEMATICA I

ORA 39

Titolo nota 30/10/2007

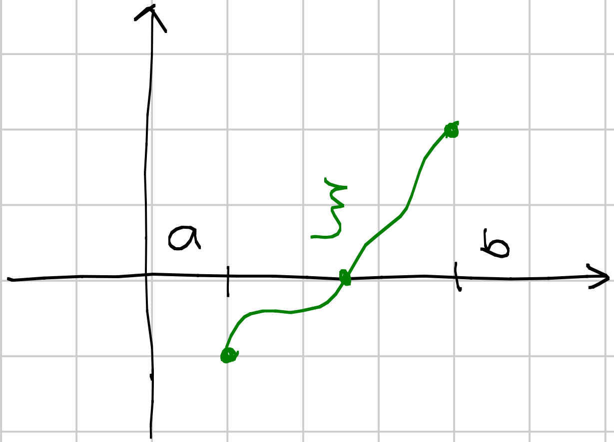
TEO. ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione **CONTINUA**

intervallo con estremi

Supponiamo che $f(a) \cdot f(b) < 0$ (cioè $f(a)$ e $f(b)$ hanno segno diverso)

Allora $\exists\, \xi \in (a, b)$ t.c. $f(\xi) = 0$

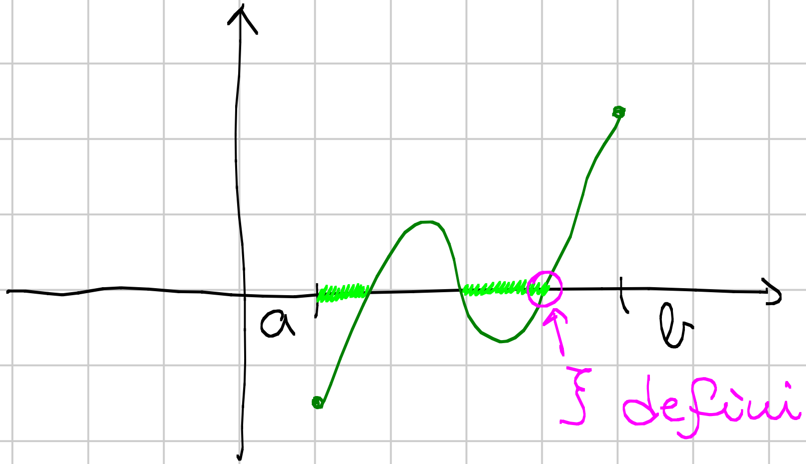


<u>Oss.</u> Il punto ξ NON è obbligato ad essere unico

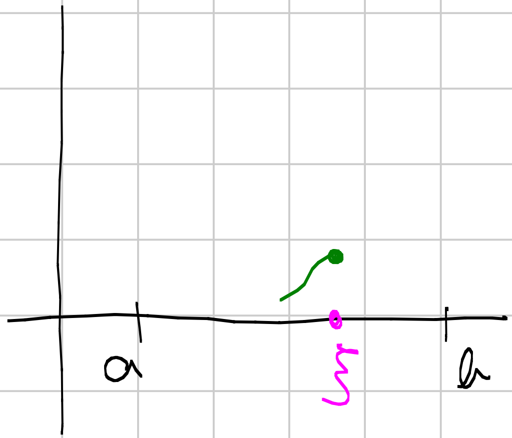
"Dim." Definiamo

$$\xi = \sup\{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$$

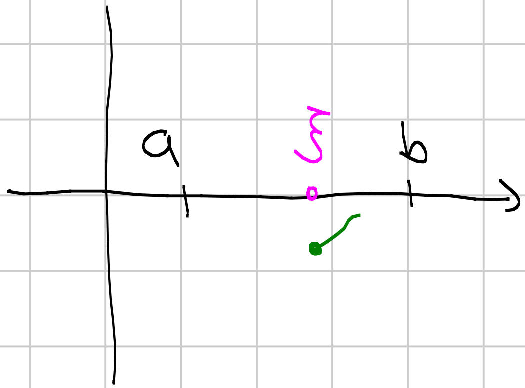
Supponiamo che $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$



Dico che $f(\xi) = 0$. Se fosse $f(\xi) > 0$, essendo continua $f(x)$ sarebbe > 0 anche un po' prima di ξ, quindi ξ non può essere il sup degli x in cui $f(x) < 0$ (il sup sarebbe + piccolo)



Se fosse $f(\xi) < 0$, allora $f(x)$ sarebbe < 0 anche per x un po' + grandi di ξ, quindi il sup sarebbe + grande.



L'unica possibilità è che sia $f(\xi) = 0$.

— o — o —

In alternativa avremmo potuto prendere

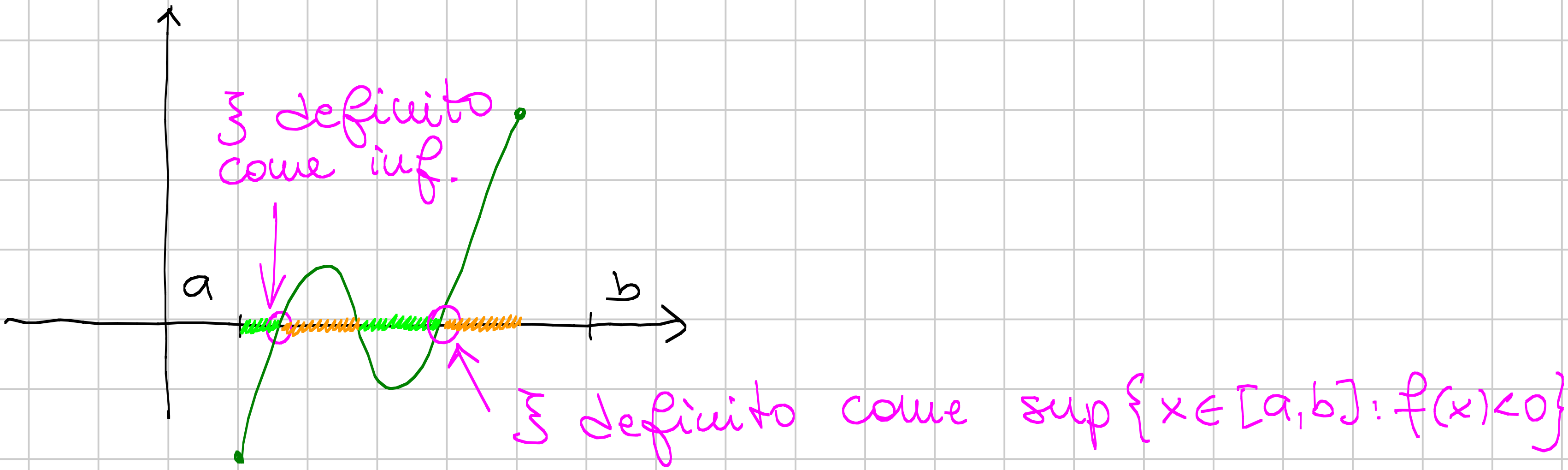
$$\xi = \inf \{ x \in [a,b] : f(x) > 0 \}$$

La dimostrazione sarebbe stata analoga.

— o —

Lo ξ fatto con il sup e con l'inf sono lo stesso?

Chiaramente se c'è un unico punto in cui f si annulla la risposta è positiva.



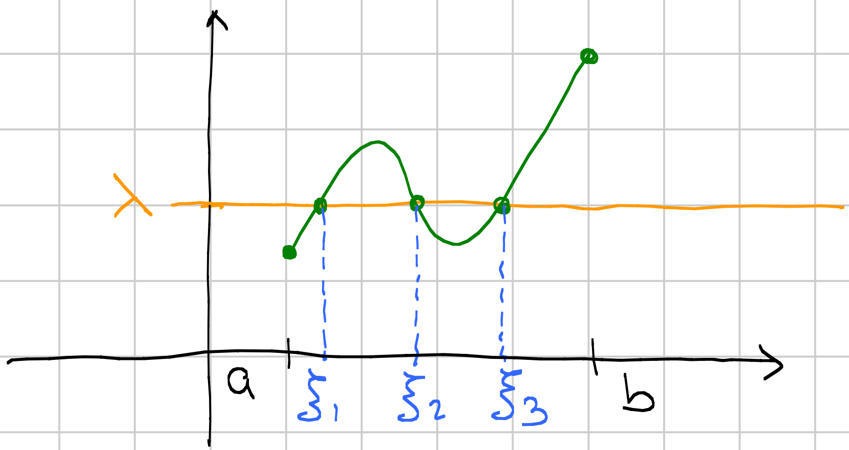
— o — o —

Variante: Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che

$$f(a) < \lambda \quad e \quad f(b) > \lambda \quad (\text{o viceversa})$$

Allora esiste almeno un punto $\xi \in (a,b)$ t.c.

$$f(\xi) = \lambda$$



— o — o —

Esercizio 1 Dimostrare che l'equazione

$$x^2 + \sin(3x) = 7$$

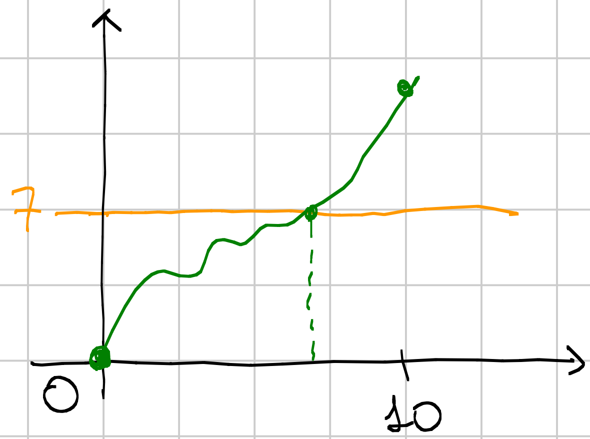
ha almeno una soluzione reale.

Considero la funzione $f(x) = x^2 + \sin(3x)$ e l'intervallo $[0, 10]$. $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ è continua. Inoltre

$$f(0) = 0, \quad f(10) = 100 + \sin(30) > 7$$

$\Rightarrow$ esiste almeno un punto in cui $f(x) = 7$.

Nota bene! $x \in (0, 10)$.



— o — o —

Esercizio 2 $\qquad x^2 + \sin(3x) = 2007$

Cambia poco o nulla. Invece di $[0, 10]$ considero l'intervallo $[0, 100]$. $f : [0, 100] \to \mathbb{R}$ è continua

$f(0) = 0 < 2007 \qquad f(100) = 100^2 + \sin(300)$

$= 10000 + \sin(300) > 2007$

Conclusione come prima

Esercizio 3

$$\overbrace{\log(1+x^2) - \arctan x^3 + x}^{f(x)} = 2007$$

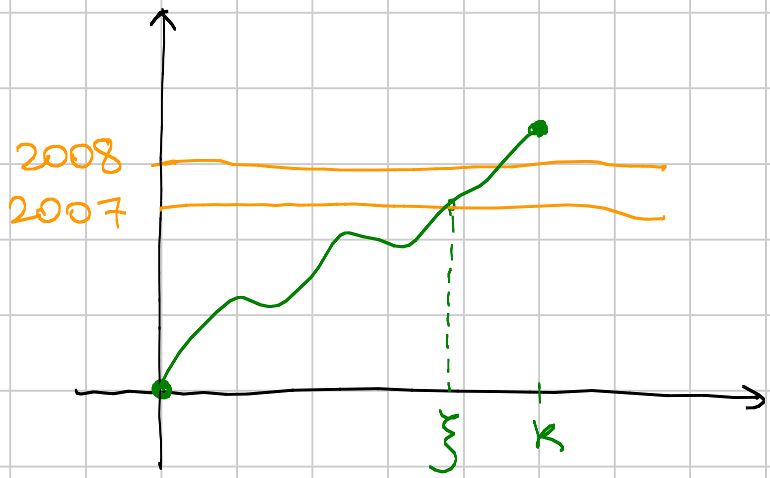
Dimostrare che ha almeno una soluzione.

$f(0)=0$. Mi serve un punto in cui $f(x) > 2007$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, cioè $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) si ha che $f(x) \geq M \quad \forall x \geq k$

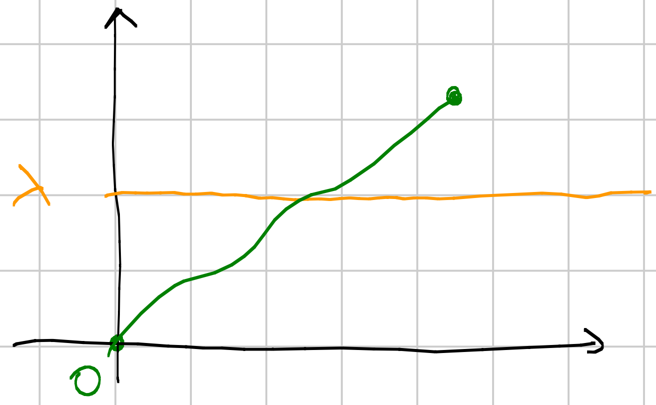
In particolare

$f(k) \geq 2008 > 2007$



Ora applico il teo. esistenza degli zeri (esteso) nell'intervallo $[0,k]$

La stessa dimostrazione vale se sostituisco 2007 con un qualunque valore $\lambda > 0$

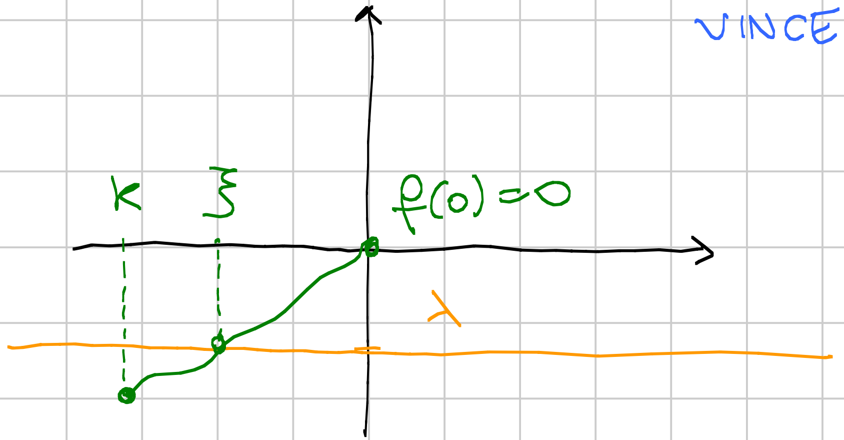


Se $\lambda < 0$, devo guardare

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left[\log(1+x^2) - \arctan x^3 + x \right] = -\infty$$

$+\infty \qquad + \frac{\pi}{2} \qquad -\infty$

VINCE



Conclusione: nell'esempio si ha che

$$f(x) = \lambda$$

ammette almeno una soluzione reale $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
Questo è equivalente a dire che $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva.

— o — o —

<u>Esercizio 4</u> Dimostrare che $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \log x + \sin\sqrt{x} + \sinh x$$

è surgettiva.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

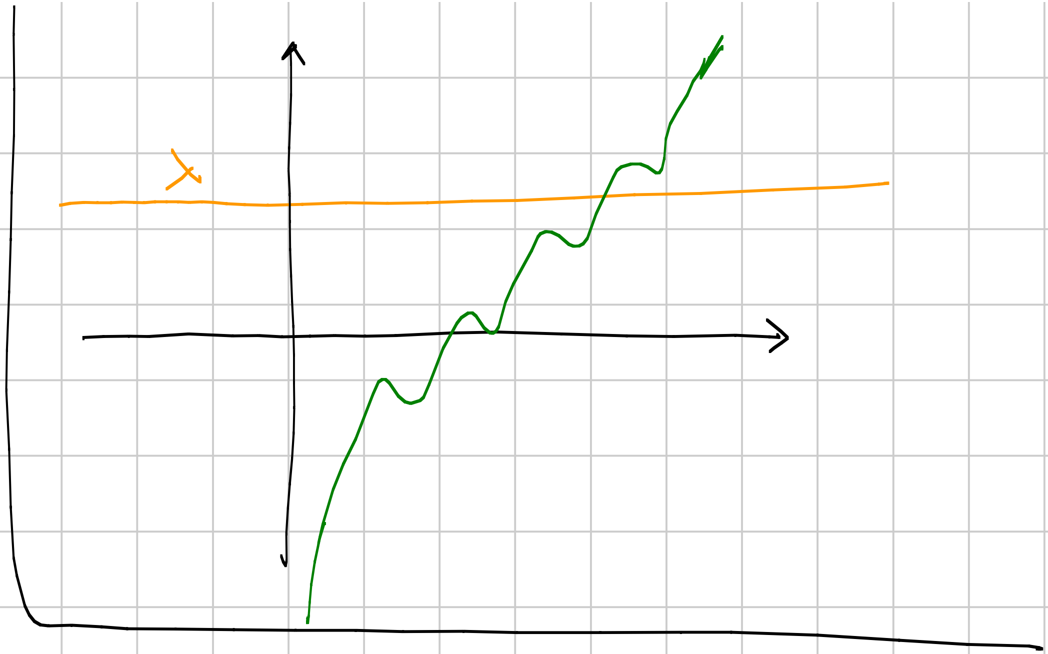
Questo basta per concludere la surgettività

Esercizio 5

Dimostrare che

$$\overbrace{\arctan\sqrt{x} + \log(1+x^3) + x^4}^{f(x)} = 2007$$

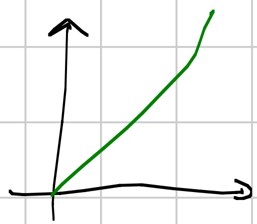
ha un'unica soluzione reale.



$f(0) = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Quindi $f(x) = 2007$ ha ALMENO una soluzione reale

$f(x)$ è somma di 3 funzioni che sono strettamente crescenti per $x \geq 0$. Quindi $f(x)$ è strett. cresc., dunque INIETTIVA, quindi la sol. è AL PIÙ UNA



$f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ è INVERTIBILE