MATEMATICA I

ORA 38

Titolo nota — 26/10/2007

Esempio 1 Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ Sappiamo per Leibnitz che converge

È il caso particolare $x=-1$ della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$ la quale converge $\iff x \in [-1,1)$

Sarà una serie di Taylor ?

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots = \boxed{?}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots$$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$$

Quindi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ è la serie di Taylor di $f(x) = -\log(1-x)$

quindi, dove converge, converge a $-\log(1-x)$

Per $x=-1$ converge, dunque converge a $-\log 2$.

In conclusione $\quad -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots = -\log 2$

— o — o —

<u>Esempio 2</u> Calcolare la somma

$$2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^5}{5} - \frac{2^7}{7} + \frac{2^9}{9} - \dots$$

È il caso $x=2$ della serie di potenze

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

cioè della serie di Taylor di arctan x.

$\boxed{\text{Quindi la serie data converge a } \arctan 2}$ **NO!!!**

La serie converge ad arctan x DOVE CONVERGE

Nel caso $x=2$ non è verificata la condizione necessaria, dunque NON converge

— o — o —

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} x^{2n}$$ ha soltanto i termini di grado pari!!

(quindi $c_n = 0$ se n è dispari)

Ponendo $x^2 = y$ otteniamo la serie di potenze

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{1}{n^2+3} y^n$$, che ha la formula classica con $c_n = \frac{1}{n^2+3}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+3}} \to 1 = L \Rightarrow R = 1$$

Quindi la serie in y converge per $|y| < 1$
non conv. per $|y| > 1$
per $y = 1$ conv. per C.A. con $\frac{1}{n^2}$

per $y = -1$ conv. per Leibnitz

Conclusione: converge per $y \in [-1, 1]$, quindi in x converge quando $x^2 \in [-1, 1]$, cioè quando $x \in [-1, 1]$.

— o — o —

Esempio Calcolare il raggio di convergenza della serie di Taylor della funzione $\arctan x$

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

I valori di x per cui converge sono gli stessi per cui converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$ Pongo $y = x^2$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{(-1)^n}{2n+1}}}_{c_n} y^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}} \to 1 = L$$

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

Controllo "a mano" gli estremi.

$\boxed{y=1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\rightsquigarrow$ converge per Leibnitz

$\boxed{y=-1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ diverge per C.A. con $\frac{1}{n}$

Conclusione: in y converge $\Leftrightarrow$ $y \in (-1, 1]$.

In x converge $\Leftrightarrow$ $x^2 \in (-1, 1]$, cioè $\Leftrightarrow$ $x \in [-1, 1]$

In particolare la serie di Taylor di $\arctan x$ converge per $x=+1$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

—o—o—

<u>Esempio</u> Per quali valori di x converge

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{2^n+5^n}{3^n+4^n}}}_{c_n} x^n$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{\sqrt[n]{2^n+5^n}}{\sqrt[n]{3^n+4^n}} = \frac{\sqrt[n]{5^n\left(1+\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}}{\sqrt[n]{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}} = \frac{5}{4}\,\frac{\overset{1^0=1}{\boxed{\sqrt[n]{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}}}}{\underbrace{\sqrt[n]{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}}_{1^0=1}} \to \frac{5}{4}$$

$$L=\frac{5}{4} \Rightarrow R=\frac{4}{5}$$

Se $|x|<\frac{4}{5}$ converge $\qquad |x|>\frac{4}{5}$ non converge

Per $x = \frac{4}{5}$ diventa

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} \boxed{\frac{2^n + 5^n}{3^n + 4^n} \cdot \frac{4^n}{5^n}}$$

a_n

Esercizio sui limiti : $a_n \to 1$

$\Rightarrow$ no cond. nec.

$\Rightarrow$ non converge

$x = -\frac{4}{5}$ ancora una volta a_n non tende a zero

$\Rightarrow$ non converge.

Conclusione: converge $\Leftrightarrow$ $-\frac{4}{5} < x < \frac{4}{5}$

—o—o—

Esempio 5 $\displaystyle\sum_{n\geq 0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2 + \cos n!}{n^7 \cdot 7^n + 5}} x^n$

c_n

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2 + \cos n!}}{\sqrt[n]{n^7 \cdot 7^n + 5}} \to \frac{1}{7} = L \Rightarrow R = 7$$

- Per $|x| < 7$ ok
- Per $|x| > 7$ nessuna speranza

Per $\boxed{x=7}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+\cos n!}{n^7 \cdot 7^n + 5} 7^n$ converge per C.A. con $\frac{1}{n^5}$

Per $\boxed{x=-7}$ converge perché imporre l'assoluta convergenza porta al caso $x=7$

Giustificazione del limite:

$$\sqrt[n]{n^7 \cdot 7^n + 5} = \sqrt[n]{7^n n^7 \left(1+\frac{5}{7^n n^7}\right)} = 7 \cdot \underbrace{\boxed{\sqrt[n]{n^7}}}_{\downarrow\, 1} \underbrace{\boxed{\left(1+\frac{5}{7^n n^7}\right)^{\frac{1}{n}}}}_{\downarrow\, 1^0 = 1}$$

$$\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{n^2-1}}}_{\downarrow\, 1} \leq \underbrace{\sqrt[n]{n^2+\cos n!}}_{\to\, 1 \text{ carab.}} \leq \underbrace{\boxed{\sqrt[n]{n^2+1}}}_{\downarrow\, 1}$$