SERIE DI POTENZE

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{c_n}_{\text{numeri assegnati, detti COEFFICIENTI}} x^n$$

x parametro $\in \mathbb{R}$

"Polinomio di grado $+\infty$" $= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$

Domande: 1. Per quali valori di x converge

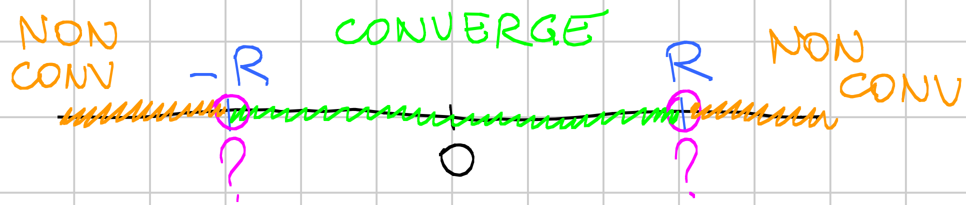
2. Per i valori di x per cui converge, determinarne esplicitamente la somma

$\boxed{\text{Domanda 1}}$

Oss. La serie converge sempre per $x=0$ e converge a c_0.

TEOREMA 1 Data una serie di potenze $\sum c_n x^n$ esiste un valore $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ ← Raggio di convergenza
tale che

(i) per $|x| < R$ la serie converge assolutamente
(ii) per $|x| > R$ la serie non converge (e non verifica nemmeno la cond. nec.)
(iii) per $|x| = R$ dipende dai casi



<u>Oss 1</u> Se $R = 0$, allora la serie converge solo per $x = 0$

<u>Oss 2</u> Se $R = +\infty$, allora la serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{TEOREMA 2}}$ (Calcolo del raggio di convergenza)

Supponiamo che esista $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Allora $R = \frac{1}{L}$ (ovviamente se $L = 0$ $R = +\infty$
se $L = +\infty$ $R = 0$)

DIM $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{c_n x^n}}_{a_n}$ Nessuna info. sul segno di a_n

Provo con l'assoluta convergenza, cioè studio la serie
$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| \cdot |x|^n$ con il criterio della radice

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|c_n| \cdot |x|^n} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x| \longrightarrow L\,|x|$$

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ Se $L|x| < 1$, cioè se $|x| < \frac{1}{L}$, allora

$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, dunque la serie iniziale converge.

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ Se $L|x| > 1$, cioè se $|x| > \frac{1}{L}$, allora

[$\sum |a_n|$ diverge a $+\infty$, dunque BOH] ma anche

$|a_n| \to +\infty$, dunque a_n non può tendere a zero,
dunque la serie non può convergere.

Questo dimostra che $\frac{1}{L} = R$. Con piccole modifiche
si adatta ai casi $L=0$
ed $L=+\infty$.

Esempio 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n}_{c_n} x^n \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = L$$

$$R = \frac{1}{L} = 1$$

- per $|x| < 1$ (cioè $-1 < x < 1$) converge
- per $|x| > 1$ (cioè $x > 1$ e $x < -1$) non converge
- $x = 1$ e $x = -1$ vanno "fatti a mano"

$\boxed{x=1}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge (no condiz. nec.)

$\boxed{x=-1}$ $\quad \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{n(-1)^n}_{a_n}$ non converge perché a_n non tende a zero.

(a_n in realtà non ha limite in quanto

$a_{2n} \to +\infty$ e $a_{2n+1} \to -\infty$)

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $c_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 = L \qquad R = \frac{1}{L} = 1$$

- per $-1 < x < 1$ converge
- per $|x| > 1$ non converge

$\boxed{x=1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge perché armonica con $\alpha = 1$

$\boxed{x=-1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge per Leibnitz

compreso $\quad$ escluso

Conclusione: la serie data converge $\iff x \in [-1, 1)$

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^4+4} x^n$ $\qquad c_n = \dfrac{n+3}{n^4+4}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n+3}}{\sqrt[n]{n^4+4}} = 1 = L \qquad R = \frac{1}{L} = 1$$

$\boxed{x=1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^4+4}$ converge per confronto asintotico con $\dfrac{1}{n^3}$

$\boxed{x=-1}$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{n^4+4}(-1)^n$ converge per assoluta convergenza (ci si riduce al caso $x=1$)

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad c_n = \dfrac{1}{n!}$

$$R = \frac{1}{L} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\boxed{\sqrt[n]{n!}}}_{+\infty}} = 0 = L$$

Converge $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

è un esempio di $\boxed{\text{SERIE DI TAYLOR}}$

Data una funzione $f(x)$ derivabile infinite volte, si dice serie di Taylor di $f(x)$ con centro in $x_0 = 0$ la serie che ha come somme parziali i polinomi di Taylor di $f(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + \dots$$

TEOREMA 3 Per tutte le funzioni decenti (e tutte quelle ottenute dalle funzioni elementari mediante composizioni e/o operaz. algebriche sono decenti) la serie di Taylor **DOVE CONVERGE!** converge al valore della funzione (quindi so calcolare la somma)

Continuazione esempio precedente

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ è il caso $x=8$ della serie di potenze

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ← è la serie di Taylor di $f(x) = e^x$,
quindi DOVE CONVERGE converge a e^x

Sempre perché $R = +\infty$
(calcolato prima)

Conclusione $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$ converge e la sua somma
è e^8