MATEMATICA I

ORA 35

Titolo nota 25/10/2007

CRITERI PER STUDIARE SERIE A TERMINI DI SEGNO QUALUNQUE

① CRITERIO DI LEIBNITZ (SERIE A SEGNO ALTERNO)
② CRITERIO ASSOLUTA CONVERGENZA

$\boxed{\text{LEIBNITZ}}$ Consideriamo la serie $\sum_{n\geq 0}^{\infty} (-1)^n \alpha_n$. Supponiamo

(i) $\alpha_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (quindi $(-1)^n \alpha_n$ è alternativ. pos. e neg.)
(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (α_n è debolm. decr.)
(iii) $\alpha_n \to 0$

Allora la serie converge.

Oss. Se almeno una delle 3 ipotesi non è verificata, allora BOH (il criterio non si applica)

Oss. Se l'ipotesi che non è verificata è la (iii), allora manca la condizione nec., dunque di sicuro la serie non converge (può div. a $\pm\infty$, o essere indeterminata)

$a_n = (-1)^n \alpha_n$. Se $a_n \to 0$, allora $|a_n| \to 0$

$$|a_n| = |(-1)^n \alpha_n| = |(-1)^n| \cdot |\alpha_n| = \alpha_n$$

Quindi $a_n \to 0 \iff \alpha_n \to 0$

Osservazione generale sulle succ. (criterio del valore assol.)

Data una succ. a_n, si ha che

$$a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$$

"Dim" Come è fatta la succ. s_k in questo caso?

$s_0 = a_0 \geq 0$

$s_1 = a_0 + a_1 = \alpha_0 - \alpha_1$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$

$\Rightarrow$ s_{2k} è una succ. decrescente

s_{2k+1} è una succ. crescente

e tendono allo stesso limite.

Esempio 1 $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

$\alpha_n = \frac{1}{n}$ $\quad$ (i) $\alpha_n \geq 0$ Ok. $\quad$ (iii) $\alpha_n \to 0$ Ok

(ii) $\alpha_{n+1} \overset{?}{\leq} \alpha_n$ $\qquad \frac{1}{n+1} \overset{?}{\leq} \frac{1}{n}$ Ok! $\Rightarrow$ La serie converge

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge per Leibniz per ogni $\alpha > 0$

Esempio 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n+5}{5n+1}}}_{\alpha_n}$

(i) $\alpha_n \geq 0$ OK

(ii) $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ BOH

(iii) $\alpha_n \to 0$ NO perché $\alpha_n \to \frac{1}{5}$

$\Rightarrow$ Di sicuro la serie non converge.

Esempio 4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\arctan \frac{n}{n^2+2}}}_{\alpha_n}$

(i) $\alpha_n \geq 0$ OK

(iii) $\alpha_n \to 0$ OK

(ii) $\alpha_{n+1} \overset{?}{\leq} \alpha_n$; $\cancel{\arctan} \dfrac{(n+1)}{(n+1)^2+2} \overset{?}{\leq} \cancel{\arctan} \dfrac{n}{n^2+2}$

strett. crescente

$$\frac{(n+1)}{(n+1)^2+2} \overset{?}{\leq} \frac{n}{n^2+2} \quad ; \qquad (n+1)(n^2+2) \overset{?}{\leq} n\,(n^2+2n+3)$$

$$\cancel{n^3}+2n+n^2+2 \overset{?}{\leq} \cancel{n^3}+2n^2+3n$$

$n^2+n-2 \geq 0$ Sicuramente vera definitivamente (in realtà vera $\forall n \geq 1$)

Ipotesi (ii) OK $\Rightarrow$ la serie converge.

— o — o —

$\boxed{\text{ASSOLUTA CONVERGENZA}}$ a_n a segno qualunque

$$\sum |a_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

Operativamente: devo studiare $\sum a_n$. Provo a studiare

$\sum |a_n|$ (questa è a termini ≥ 0, quindi ho + criteri a disposiz.)

$\sum |a_n|$ ↗ converge $\rightsquigarrow$ la serie $\sum a_n$ converge

↘ diverge a $+\infty$ $\rightsquigarrow$ BOH

Dim. $a_n = |a_n| + (a_n - |a_n|) = |a_n| - (|a_n| - a_n)$

$$\sum a_n = \underbrace{\sum |a_n|}_{\text{converge per ipotesi}} - \sum (|a_n| - a_n)$$

Devo dimostrare che $\sum (|a_n| - a_n)$ converge

$$0 \leq |a_n| - a_n \leq 2|a_n|$$

$\sum 2|a_n|$ converge (sempre per ipotesi), dunque

$\sum (|a_n| - a_n)$ converge per confronto

$\Rightarrow$ la serie data è differenza di 2 serie a termini ≥ 0 convergenti

Esempio 1 $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\frac{\cos n}{n^2}}_{a_n}$ $\quad a_n$ è a segni variabili

Provo a studiare $\sum |a_n|$, cioè $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ (termini ≥ 0)

$$\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Conclusione

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge (armonica gen. con $\alpha = 2 > 1$)

$\Downarrow$ ← Criterio del confronto tra serie a termini ≥ 0

$\sum \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge

$\Downarrow$ ← Criterio assoluta convergenza

$\sum \frac{\cos n}{n^2}$ converge

SOLUZIONE SBAGLIATA! $\frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

$\sum \frac{1}{n^2}$ converge $\overset{\text{NOO}}{\Rightarrow}$ $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ converge

il confronto vale SOLO tra serie a termini ≥ 0

Esempio 2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\boxed{\frac{n^5+5n+25}{n^7-7n+82}}}_{a_n}$

(i) $a_n \geq 0$ definitivamente ci crediamo!

(iii) $a_n \to 0$ OK

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ MAH!!!

Assoluta convergenza $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} | \ldots |$

Almeno definitivamente abbiamo che

$$|a_n| = \frac{n^5+5n+25}{n^7-7n+82}$$

Brutale: $|a_n| \sim \frac{1}{n^2}$

$\sum |a_n|$ converge (per confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$)

$\Rightarrow \sum a_n$ converge (per assoluta convergenza)

— o — o —

Esempio 3

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \boxed{\frac{n^5+5n+25}{n^6-7n+82}}$$

$\sum |a_n|$ diverge per confronto asint. con $\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \sum a_n$ boh.