MATEMATICA I

ORA 32

Titolo nota — 24/10/2007

Serie Numeriche

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

può anche essere diverso

Somme parziali

$$s_0 = a_0$$
$$s_1 = a_0 + a_1$$
$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2$$
$$\vdots$$
$$s_k = a_0 + a_1 + \dots + a_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$$

Il limite delle s_k individua il comport. della serie

<u>Condizione necessaria</u>. Se $\sum_{n=0}^{\infty}$ converge, allora $a_n \to 0$

In particolare; se a_n non tende a 0, allora la serie non converge.

CRITERI DI CONVERGENZA: come stabilire se una serie converge o no senza calcolare esplicitamente le s_k.

SERIE
- ↗ A TERMINI ≥ 0 (segno costante)
  ↳ Basta definitivamente
- ↘ A TERMINI DI SEGNO VARIABILE

<u>Oss. fondamentale</u> Se a una serie io modifico UN NUMERO FINITO di termini (definitivamente resta tutto uguale) il comportamento non cambia (eventualmente cambia il numero al quale convergono le s_k)

<u>Teorema</u> Una serie a termini ≥ 0 (definitivamente) può solo
- convergere
- divergere a $+\infty$

<u>Dim.</u> In questo caso la successione s_k è (debolmente) CRESCENTE
⇝ vedi teorema succ. monotone.

Esempio 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{n^2+27}{n^2+3n+15}}}_{a_n}$$

È improbabile trovare una formula per le s_k

$a_n \geq 0$ sempre $\Rightarrow$ può convergere o div. a $+\infty$.

Controllo condizione necessaria

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+27}{n^2+3n+15} = 1$$

Poiché il limite non è zero, di sicuro la serie NON CONVERGE.
Quindi diverge a $+\infty$.

Esempio 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+27}{n^3+3n+15}$$

$a_n \geq 0$ sempre. $a_n \to 0$ quindi PUÒ convergere (ma non è obbligata a farlo). Per ora BOH.

CRITERI PER SERIE A TERMINI ≥ 0

1. RADICE
2. RAPPORTO
3. CONFRONTO
4. CONFRONTO ASINTOTICO $\nearrow$ CASI STANDARD $\searrow$ CASI LIMITE

① <u>RADICE</u>. Sia $a_n \geq 0$ definitivamente. Supponiamo che

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora
$l > 1 \Rightarrow$ la serie diverge
$l < 1 \Rightarrow$ la serie converge
$l = 1 \Rightarrow$ BOH

② <u>RAPPORTO</u> Sia $a_n > 0$ definitiv. Supponiamo che

$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora come nella radice.

③ **CONFRONTO** Sia $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente.
Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} b_n = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

ACHTUNG !!! Non ci sono altre implicazioni.

④ **CONFRONTO ASINTOTICO** (CASO STANDARD)

Siano a_n e b_n 2 succ. con $a_n \geq 0$ e $b_n > 0$. Supp. che

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} \text{ esista e sia un certo } \ell \begin{smallmatrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{smallmatrix}$$

Allora $\sum a_n$ e $\sum b_n$ hanno lo stesso comportamento (se una conv, l'altra conv.; se una div. a $+\infty$, l'altra anche)

Utilizzo operativo del confronto asintotico: devo studiare $\sum a_n$. Cerco una $\sum b_n$ che so studiare in modo che $\frac{a_n}{b_n} \to l \neq 0 \neq +\infty$. A quel punto ho finito.

— o — o —

TABELLINA DI SERIE NOTE

① SERIE GEOMETRICA $\sum_{n\geq 0}^{\infty} a^n$ (a è un parametro)

$= 1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots$

$$\sum_{n\geq 0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \text{per } -1 < a < 1 & \text{converge a } \frac{1}{1-a} \\ a \geq 1 & \text{diverge a } +\infty \\ a \leq -1 & \text{indeterminata} \end{cases}$$

② SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

Serie armonica: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots$

Armonica generalizzata: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ α = esponente fissato

(per $\alpha = 1$ è l'armonica "vera")

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

$\nearrow$ converge (ma non si sa la somma) se $\alpha > 1$

$\searrow$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

③ PARENTE DELLA ②

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}$$

$\nearrow$ converge se $\alpha > 1$

$\searrow$ diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

Esempio 2 → continua

$$\sum_{n=0}^{\infty} \boxed{\frac{n^2+27}{n^3+3n+15}}$$

a_n

$a_n \to 0$ e $a_n \geq 0$ sempre. Quindi sono possibili 2 comp

* converge
* diverge a $+\infty$

BRUTALE! $a_n \sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$ armonica con $\alpha = 1$

$\Rightarrow$ DIVERGE A $+\infty$

Rigoroso: confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n^2+27}{n^3+3n+15}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+27}{n^3+3n+15} \cdot n$$

$$= 1 \begin{array}{l} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{array}$$

Poiché il limite di $\frac{a_n}{b_n}$ è $\neq 0$ e $\neq +\infty$ (ed esiste)

$\sum a_n$ e $\sum b_n$ si comportano allo stesso modo.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ diverge (è in tabellina) Quindi

$\sum a_n = +\infty$ (diverge a $+\infty$).