MATEMATICA I

ORA 31

Titolo nota

23/10/2007

SERIE NUMERICHE

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$ = somma di tutti gli (infiniti) elementi di una successione a_n.

Cosa vuol dire sommare infiniti addendi ?

SOMME PARZIALI

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_1 \\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\
&\vdots \\
s_k &= a_0 + a_1 + \dots + a_k \\
&= \sum_{n=0}^{k} a_n \leftarrow
\end{aligned}$$

NUMERO FINITO DI ADDENDI

La serie (cioè la somma degli infiniti addendi) si definisce come

$$\lim_{k \to +\infty} s_k = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & \text{si dice che la serie CONVERGE ad } l \\ +\infty & \text{" la serie diverge a } +\infty \\ -\infty & \text{" " " " } -\infty \\ \text{N.E.} & \text{" la serie è INDETERMINATA} \end{cases}$$

Esempi banali

① $a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies s_k = 0 + 0 + \dots + 0 = 0 \longrightarrow 0$

② $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies s_k = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{a_0 + a_1 + \dots + a_k} = k+1$

$s_k = k+1 \implies s_k \to +\infty \implies$ la serie diverge

③ $a_n = \begin{cases} 1 & n \text{ pari} \\ -1 & n \text{ dispari} \end{cases}$

$s_0 = a_0 = 1$

$s_1 = a_0 + a_1 = 1 - 1 = 0$

$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 - 1 + 1 = 1$

$s_3 = 0$

$$s_k = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ pari} \\ 0 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases}$$

$\lim_{k \to +\infty} s_k$ N.E.

$\Rightarrow$ la serie è INDETERMINATA

— o — o —

SERIE TELESCOPICHE

$\boxed{1}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$s_1 = a_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$s_2 = a_1 + a_2 = \underbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}}_{a_2} = 1 - \frac{1}{3}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \underbrace{\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}}}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}}_{a_2} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}}_{a_3} = 1 - \frac{1}{4}$$

In generale "dovrebbe essere" $s_k = 1 - \dfrac{1}{k+1}$

La dimostrazione si fa per induzione

Passo base $\quad k=1 \quad s_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = a_1 \quad$ VERO!

Passo induttivo $\quad$ Ipotesi $\quad s_k = 1 - \dfrac{1}{k+1}$

Tesi $\quad s_{k+1} = 1 - \dfrac{1}{k+2}$

Dim.

$$s_{k+1} = \overbrace{a_1 + a_2 + \dots + a_k}^{s_k} + a_{k+1} = s_k + a_{k+1} = \quad \text{(uso ipotesi)}$$

$$= \underbrace{1 - \cancel{\frac{1}{k+1}}}_{s_k} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{k+1}} - \frac{1}{k+2}}_{a_{k+1}} = 1 - \frac{1}{k+2} \quad \text{Tesi dimostrata}$$

Essendo $s_k = 1 - \frac{1}{k+1}$ si ha che $s_k \to 1$,

quindi la serie converge a 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$

— o — o —

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log(1+1) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \dots$

$s_1 = a_1 = \log 2$

$s_2 = a_1 + a_2 = \log 2 + \log\left(1+\frac{1}{2}\right)$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \log 2 + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right)$

Oss. $\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right) = \log(n+1) - \log n$

$s_1 = a_1 = \log 2 - \log 1$

$s_2 = a_1 + a_2 = \underbrace{\cancel{\log 2} - \log 1}_{a_1} + \underbrace{\log 3 - \cancel{\log 2}}_{a_2} = \log 3$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \underbrace{\cancel{\log 2} - \log 1}_{a_1} + \underbrace{\cancel{\log 3} - \cancel{\log 2}}_{a_2} + \underbrace{\log 4 - \cancel{\log 3}}_{a_3} = \log 4$$

$s_k = \log(k+1)$ $\rightsquigarrow$ Dimostrare (esercizio) per induzione!

$s_k \to +\infty \implies$ la serie diverge a $+\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(n! + 2^n)}{n^2 + 3\sin n + 7}$$

$\rightsquigarrow$ impossibile scrivere una formula esplicita per s_k

CRITERI DI CONVERGENZA $\rightsquigarrow$ permettono di stabilire se una serie converge o no senza calcolare gli s_k

Non permettono di calcolare la SOMMA nel caso in cui la serie converga

PROPRIETÀ ALGEBRICHE DELLE SERIE

Siano $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Allora

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

VERA TRANNE NEI CASI DI INDETERMINAZIONE e NEL CASO $\infty - \infty$

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$ NON È IL PRODOTTO DELLE SERIE

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1$$

Idea di come si dimostrano

$$\sum a_n \qquad \sum b_n \qquad \sum \overset{\substack{c_n \\ \shortparallel}}{(a_n+b_n)}$$

$S_k^{(a)} = a_0 + a_1 + \dots + a_k$ somme parziali prima serie

$S_k^{(b)} = b_0 + b_1 + \dots + b_k$ " " seconda "

$$S_k^{(c)} = c_0 + c_1 + \dots + c_k = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) + \dots + (a_k+b_k)$$

$$= a_0 + \dots + a_k + b_0 + \dots + b_k = S_k^{(a)} + S_k^{(b)}$$

Se $S_k^{(a)} \to l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $S_k^{(b)} \to l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora

$S_k^{(c)} \to l_1 + l_2$ tranne nel caso $+\infty - \infty$.

CONDIZIONE NECESSARIA

$$\boxed{\text{Se } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ CONVERGE, allora } a_n \to 0}$$

UTILIZZO OPERATIVO: se a_n non tende a zero (cioè a_n tende ad altro oppure non ha limite) allora di sicuro la serie non converge (cioè può tendere a $+\infty$, a $-\infty$, o essere indeterminata)

Dim. cond. necessaria

$$s_{k+1} = s_k + a_{k+1}$$

$$a_{k+1} = \underset{\downarrow \atop l}{s_{k+1}} - \underset{\downarrow \atop l}{s_k} \longrightarrow 0$$

Se la serie converge, vuol dire che $s_k \to l \in \mathbb{R}$