MATEMATICA I

ORA 30

Titolo nota 23/10/2007

SVILUPPO DI TAYLOR CON CENTRO IN UN PUNTO $x_0 \neq 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \quad \text{per } x \to 0$$

Se $x_0 \neq 0$ possiamo pensare di considerare la funzione

$$g(h) = f(x_0 + h) \qquad \text{con } h \text{ piccolo}$$

Posso sviluppare come sopra la funzione $g(h)$ per $h \to 0$

$$g(h) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}h + \dots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

$$g(h) = f(x_0+h), \quad g'(h) = f'(x_0+h), \quad g''(h) = f''(x_0+h)$$

$g(0) = f(x_0)$, $g'(0) = f'(x_0)$, in generale $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(x_0+h)$

quindi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + o(h^n)$$

Se $x_0+h = x$, allora $h = x-x_0$ e sostituendo

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0}$$

FORMULA DI TAYLOR CON CENTRO IN x_0

Con $n = 1$ otteniamo

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

cioè la definizione di differenziale

— o — o —

Esempio 1 Sviluppare $f(x) = \arctan x$ con p.to base $x_0 = 1$ e ordine $n = 2$

Calcolo le derivate fino all'ordine 2

$$f(x) = \arctan x, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}, \quad f'(1) = \frac{1}{2}, \quad f''(1) = -\frac{1}{2}$$

$$\underbrace{\arctan(1+h)}_{x_0+h} = \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{f(x_0)} + \underbrace{\frac{1}{2}h}_{f'(x_0)h} + \underbrace{\left(-\frac{1}{4}\right)h^2}_{\frac{f''(x_0)}{2}h^2} + \underbrace{o(h^2)}_{o(h^2)}$$

$$\arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}h - \frac{1}{4}h^2 + o(h^2) \qquad \text{per } h \to 0$$

oppure (che è lo stesso)

$$\arctan x = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right) \quad \text{per } x \to 1.$$

— o — o —

<u>Esempio 2</u> Sviluppare $f(x) = \arctan(\cos x)$ con p.to base $x_0 = 0$ e ordine $n = 2$.

Non si possono utilizzare gli sviluppi di $\arctan t$ per $t \to 0$ in quanto $\cos x \to 1$

$\arctan(1+h)$ dove ora $h \to 0$

$$\arctan(\cos x) = \arctan\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

sviluppo di $\cos x$ vicino a $x_0 = 0$ e ordine 2

$$\arctan(1+R) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}R - \frac{1}{4}R^2 + o(R^2)$$

$$\arctan\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) +$$

$$- \frac{1}{4}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o\left(\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} + o(x^2)$$

Se avessi voluto lo stesso sviluppo di ordine $n=4$

$$\arctan\left(1 \overset{R}{\boxed{- \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\left(\overset{R}{\quad}\right)$$

$$- \frac{1}{4}\left(\quad\right)^2 + o\left(\left(\quad\right)^2\right)$$

cos x di ordine 4

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{48} - \frac{x^4}{16} \qquad + o(x^4)$$

unico termine che sopravvive da R^2

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Esempio 3

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan(\cos x) - \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4}}{\log(1 + x^2 + x^6) \cdot \sin(\sin^2(x - x^3))}$$

Sviluppo Numeratore: $\arctan(\cos x) - \frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{4} =$

$$= \cancel{\frac{\pi}{4}} - \cancel{\frac{x^2}{4}} - \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \cancel{\frac{\pi}{4}} + \cancel{\frac{x^2}{4}} = -\frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

Devo sviluppare il Denominatore all'ordine 4

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\log(1+x^2+x^6) = x^2+x^6 - \frac{1}{2}(x^2+x^6)^2 + \frac{1}{3}(x^2+x^6)^3 + o(x^4)$$

$$= x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$$

$$\sin(x-x^3) = \sin(x+o(x)) = x+o(x)$$

$$\sin^2(x-x^3) = (x+o(x))^2 = x^2+o(x^2)$$

$$\sin(\sin^2(x-x^3)) = \sin(x^2+o(x^2)) = x^2+o(x^2)$$

$$\log(1+x^2+x^6) = x^2+o(x^2)$$

$$\sin(\quad)\cdot\log(\quad) = x^4+o(x^4) = \text{Denominatore}$$

$$\frac{\text{Num.}}{\text{Den.}} = \frac{-\frac{x^4}{24} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \frac{\cancel{x^4}\left(-\frac{1}{24} + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4}\right)}$$

$$\to -\frac{1}{24}$$

— o —

Esempio 4

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{n} - \sinh\frac{1}{n}\right)\left(\log(1+n^3) - 3\log n\right)$$

$$(0 - 0)(\infty - \infty)$$

$$\log(1+n^3) - 3\log n = \log(1+n^3) - \log(n^3)$$

$$= \log\left(\frac{1+n^3}{n^3}\right) = \log\left(1+\frac{1}{n^3}\right)$$

Pongo $x = \frac{1}{n}$ (quando $n \to +\infty$, ho che $x \to 0^{(+)}$)

$$\lim_{x\to 0} \left(\sin x - \sinh x\right)\log(1+x^3) = 0 \cdot 0 = 0$$

Se fosse stato

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin h x}{\log(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - \left(x + \frac{x^3}{6}\right) + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} - \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = -\frac{1}{3}$$

Il Denominatore poteva essere

$$\log(1+x^3) + \boxed{x \cdot \arctan x \cdot \arcsin\left(x^2 + \sin^2 x^3\right)}$$

$$\sim x^4 = o(x^3)$$