MATEMATICA I

ORA 29

Titolo nota 19/10/2007

"Dimostrazione" della formula di Taylor.

CASO PARTICOLARE $n=3$. Devo dimostrare che

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + o(x^3) \text{ per } x \to 0$$

cioè $$f(x) - f(0) - f'(0)x - \dots - \dots = o(x^3)$$

Divido per x^3 e faccio il lim per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x - \frac{f''(0)}{2}x^2 - \frac{f'''(0)}{6}x^3}{x^3} = \qquad \frac{0}{0} \text{ H}\hat{\text{o}}\text{p}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)\cdot x - \frac{f'''(0)}{2}x^2}{3x^2} = \qquad \frac{0}{0} \text{ H}\hat{\text{o}}\text{p}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)\,x}{6x} = \frac{0}{0} \quad \text{Hôp}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = f'''(0) - f'''(0) = 0$$

— o — o —

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$e^{2x} = 1 + (2x) + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$e^{x^2} = 1 + (x^2) + \frac{(x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

posso mettere $o(x^5)$

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^3}{6} + \frac{(\sin x)^4}{24} + o(\sin^4 x)$$

Ora $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$ lo sostituisco al posto di ogni $\sin x$

$$= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{6}\left(\quad \right)^3 + \frac{1}{24}\left(\quad \right)^4 + \boxed{o(\sin^4 x)}$$

$$= 1 + x - \cancel{\frac{x^3}{6}} + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \cancel{\frac{1}{6}x^3} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

doppio prodotto di x per $\left(-\frac{x^3}{6}\right)$

$$-\frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \frac{-4+1}{24}$$

$$= \boxed{1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^4)}$$

$$e^x = 1 + x + \dots + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$$= 1 + x + \dots + \frac{x^4}{24} + x^4 \omega(x) \qquad \lim_{x \to 0} \omega(x) = 0$$

$$e^{\sin x} = 1 + (\sin x) + \dots + \frac{(\sin x)^4}{24} + \boxed{\sin^4 x \, \omega(\sin x)}$$

vorrei che fosse $o(x^4)$

VERA!!!

Dividi il termine in questione per x^4 e faccio il limite

$$\frac{\boxed{\sin^4 x} \, \boxed{\omega(\sin x)}}{x^4} = 0$$

$\frac{\sin^4 x}{x^4} \to 1$

$\omega(\sin x) \to 0$ volendo con cambio variabili $y = \sin x$

$\sin(x+x^3)$ $\rightsquigarrow$ sviluppo di ordine 3

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\sin(x+x^3) = (x+x^3) - \frac{(x+x^3)^3}{6} + o\left((x+x^3)^3\right)$$

$$= x + x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$= x + \frac{5}{6}x^3 + \boxed{o(x^3)}$$

↓ Si potrebbe mettere anche
$o(x^4)$ perché $\sin(x+x^3)$ è
una funzione DISPARI
(verificare), dunque nello
sviluppo x^4 non c'è

$\cos(\sin x)$ sviluppo di ordine 4

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$$

$o(x^4)$

$$\cos(\sin x) = 1 - \frac{(\sin x)^2}{2} + \frac{(\sin x)^4}{24} + \boxed{o(\sin^4 x)}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x^4}{3}\right) + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

DOPPIO PROD

— o — o —

$\sin(\cos x)$ $\qquad$ $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$

$$\sin(\cos x) = \cos x - \frac{1}{6}\cos^3 x + \frac{1}{120}\cos^5 x + o(\cos^5 x)$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{1}{6}(\quad)^3 + \frac{1}{120}(\quad)^5 + o(\quad)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{1}{6}\left(1 + \begin{matrix}\text{tripli}\\ \text{prod.}\end{matrix}\right) + \frac{1}{120}\left(1 + \cdots\right) + o(x^5)$$

QUESTE COSE NON SI FANNO !!!

$\cos(\sin x)$ Quando $x \to 0$, ho che $\sin x \to 0$, quindi posso usare lo sviluppo di $\cos t$ che vale per $t \to 0$

$\sin(\cos x)$ Quando $x \to 0$, ho che $\cos x \to 1$, quindi NON posso usare lo sviluppo di $\sin t$ che vale per $t \to 0$

$e^{\sin x}$	Ok	$\sin x \to 0$	e^t con $t \to 0$
$\sin(e^x)$	NO	$e^x \to 1$	$\sin t$ con $t \to 1$, e non $t \to 0$

Esempio 1 $\sin(\arctan(\log(1+x^2))) = x^2 + o(x^2)$

$\log(1+x) = x + o(x)$ $\qquad$ $\log(1+x^2) = x^2 + o(x^2)$

$x^2 + o(x^3)$

$\arctan(\log(1+x^2)) =$

$= \arctan(x^2 + o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$

$\arctan t = t + o(t)$

$\sin(\arctan \dots) = \sin(x^2 + o(x^2)) = x^2 + o(x^2)$

$\sin t = t + o(t)$

Esempio 2 $\sqrt{1+\sin x}$ sviluppo di ordine 2

$(1+x)^{+\frac{1}{2}}$

$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + o(x^2)$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$

$$(1+\sin x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(\sin x) - \frac{1}{8}(\sin x)^2 + o(\sin^2 x)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

<u>Esempio 3</u>

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot (\cos x)^{-1} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^{-1}}_{(1+t)^{-1}}$$

con $t = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + \dots$$