DERIVATA DELLA FUNZIONE INVERSA

Sia $f(x)$ una funzione e sia $g(x)$ la sua inversa.
Questo vuol dire che

$f(g(x)) = x$ per ogni $x \in$ insieme di partenza di g

$g(f(x)) = x$ " " " " f

$\boxed{\text{NB}}$ Insieme di partenza di f = insieme di arrivo di g
E VICEVERSA

Supponiamo che f e g siano derivabili. Derivando la 1ª

relazione a dx e sx ottengo

$$[f(g(x))]' = [x]'$$

$$\underbrace{f'(g(x)) \cdot g'(x)}_{\text{Derivata composizione}} = 1 \implies \boxed{g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}}$$

Esempio 1 $\quad f(x) = \tan x \quad g(x) = \arctan x$

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$f'(g(x)) = 1 + \tan^2(g(x))$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = $$

$$= \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan x)}$$

$$= \frac{1}{1 + [\tan(\arctan x)]^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

Esempio 2 $\quad f(x) = e^x \quad g(x) = \log x$

$$f'(x) = e^x$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\log x}} = \frac{1}{x}$$

— o — o —

Esempio 3 $\quad f(x) = \sin x \quad g(x) = \arcsin x \quad f'(x) = \cos x$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{\cos(g(x))} \boxed{=} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(g(x))}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - [\sin(\arcsin x)]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Nota bene: abbiamo usato che $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$.
Questa formula vale solo nel I e IV quadrante, cioè per

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

L'abbiamo usato con $\alpha = \arcsin x$ che "fortunatamente" assume valori proprio in quell'intervallo. Quindi ok.

— o — o —

Per esercizio: fare lo stesso calcolo con $\cos x$ e $\arccos x$

— o — o —

Esempi di calcolo di derivate

① $f(x) = \sin x + \log x + e^x$; $f'(x) = \cos x + \frac{1}{x} + e^x$

② $f(x) = \underbrace{\log x}_{f} \cdot \underbrace{\sin x}_{g}$ $\qquad f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \underbrace{\sin x}_{g} + \underbrace{\log x}_{f} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'}$

③ $f(x) = \sin(e^x)$ $\quad f'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x$

derivata del sin

derivata di e^x

④ $f(x) = \cos x \cdot \sin(e^x)$

$$f'(x) = (\cos x)' \cdot \sin(e^x) + \cos x \cdot (\sin(e^x))'$$

$$= -\sin x \cdot \sin(e^x) + \cos x \cdot \cos(e^x) \cdot e^x$$

⑤ $f(x) = \sqrt{x}$

$f(x) = x^{1/2}$

$f(x) = x^\alpha$

$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$

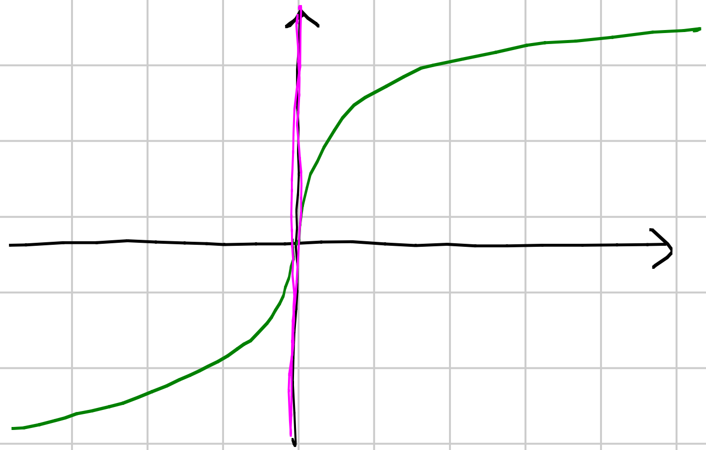
$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$

⑥ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$\alpha = \frac{1}{3}$

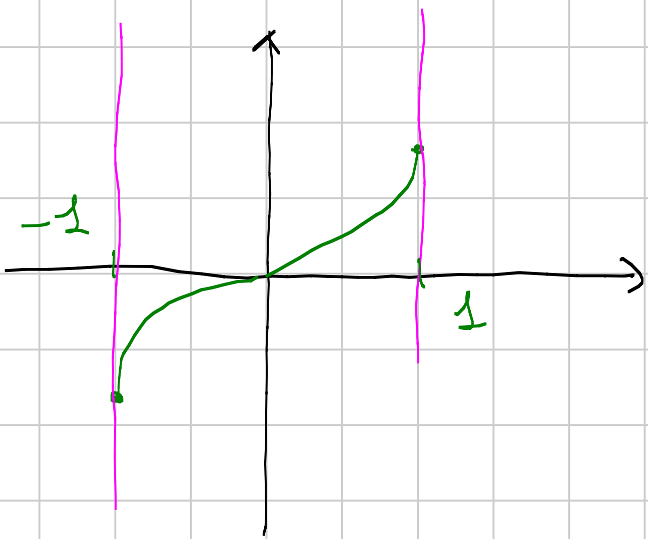
Occhio: deve essere $x \neq 0$.



Per $x=0$ la retta tangente al grafico "tende a diventare verticale"

Stessa cosa succede per $f(x) = \arcsin x$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



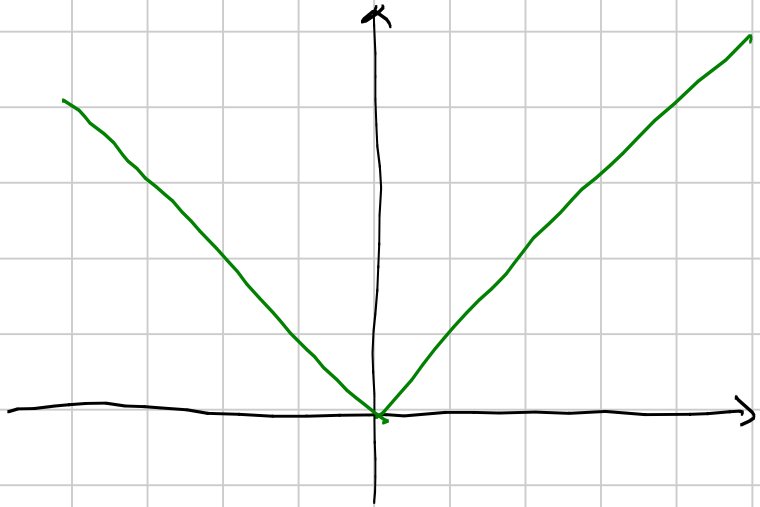
$f'(x)$ tende a $+\infty$ quando $x \to 1^-$ oppure $x \to -1^+$

Retta tangente verticale in $x = 1$ e $x = -1$

DERIVABILE IN x_0 $\Rightarrow$ CONTINUA IN x_0

Non vale il viceversa. $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x>0 \\ \text{N.E.} & \text{per } x=0 \\ -1 & \text{per } x<0 \end{cases}$$



Per mostrare che $f'(0)$ non esiste si fa il rapp. inc.

$x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|x_0+h|-|x_0|}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

DIVERSI

$f(x) = x|\sin x|$ Calcolare $f'(0)$

Rapp. increm. $x_0 = 0$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}|\sin h| - 0}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} |\sin h| = 0.$$

—o—o—

Ancora esempi di calcolo

(7) $e^{\sin x} = f(x)$ $f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x$

(8) $f(x) = \cos(x^2)$ $f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$

(9) $f(x) = x^3 e^{-x^4}$ $f'(x) = (x^3)' e^{-x^4} + x^3 \left(e^{-x^4}\right)'$

$$= 3x^2 e^{-x^4} - 4x^3 x^3 e^{-x^4}$$

(10) $f(x) = 3^x$ $\qquad f(x) = e^{x \cdot \log 3}$

$$f'(x) = \left(e^{x\log 3}\right)' = e^{x\log 3} \cdot (x\log 3)'$$

$$= e^{x\log 3} \cdot \log 3$$

$$= 3^x \cdot \log 3$$

(11) $f(x) = \log 37$ $\qquad f'(x) = 0$ $\qquad$ derivata di una costante !!!!

(12) $f(x) = x^{\cos x}$ $\qquad \boxed{\cancel{f'(x) = \cos x \, x^{\cos x - 1}}}$ NO

$$f(x) = e^{\cos x \cdot \log x}$$

$$f'(x) = e^{\cos x \cdot \log x} \left(\cos x \cdot \log x\right)' =$$

$$= e^{\cos x \cdot \log x}\left((\cos x)' \cdot \log x + \cos x \cdot (\log x)'\right)$$

$$= x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \log x + \cos x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

(13) $f(x) = x^{\alpha}$ $\qquad f(x) = e^{\alpha \log x}$

$$f'(x) = \left(e^{\alpha \log x}\right)' = e^{\alpha \log x}(\alpha \log x)$$

$$= e^{\alpha \log x} \cdot \frac{\alpha}{x}$$

$$= x^{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha - 1}$$