MATEMATICA I

ORA 24

Titolo nota 17/10/2007

Calcolo di derivate

Esempio 1 $f(x) = \cos x$ $\qquad f'(x) = -\sin x$

per esercizio fare con formula $\cos\alpha - \cos\beta$

1° modo: rapp. incrementale

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h - \cos x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\cos x_0 \underbrace{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h}}}_{\to 0} - \sin x_0 \underbrace{\boxed{\frac{\sin h}{h}}}_{\to 1} \right] = -\sin x_0$$

2° modo: differenziale

$$\cos(x_0+h) = \cos x_0 \cdot \cos h - \sin x_0 \cdot \sin h = \text{(SVILUPPINI)}$$

$f(x_0+h)$

$$= \cos(x_0)\left(1+o(h)\right) - \sin x_0 \left(h + o(h)\right)$$

$$= \cos x_0 \boxed{-\sin x_0} \cdot h + o(h)$$

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

BRUTALMENTE

LIMITI NOTEVOLI $\longleftrightarrow$ SVILUPPINI $\longleftrightarrow$ DERIVATE FUNZ. ELEMENTARI

Esempio 2 $f(x) = \frac{1}{x}$ $x_0 \neq 0$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{x_0} - \cancel{x_0} - h}{(x_0+h) \cdot x_0} = \lim_{h \to 0} \left[-\frac{1}{(x_0+h)x_0} \right] = -\frac{1}{x_0^2}$$

Esempio 3 $f(x) = \log x$ $x_0 > 0$ $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log(x_0+h) - \log x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \log\left(\frac{x_0+h}{x_0}\right) = \lim_{h \to 0} \boxed{\frac{\log\left(1+\frac{h}{x_0}\right)}{\frac{h}{x_0}}} \, x_0 = \frac{1}{x_0}$$

$\to 1$

TABELLINA DI DERIVATE

$f(x)$	$f'(x)$	
costante	0	
x^k	$k\,x^{k-1}$	$k \in \mathbb{N}$ $k \in \mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
e^x	e^x	
$\log x$	$\frac{1}{x}$	

$f(x)$	$f'(x)$	
$\tan x$	$\boxed{\frac{1}{\cos^2 x}}$	$\boxed{1+\tan^2 x}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
a^x	$a^x \cdot \log a$	

TEOREMI ALGEBRICI SULLE DERIVATE

$$(\lambda f)' = \lambda f' \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Derivata della composizione:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Derivata della funzione inversa: se g è l'inversa di f

allora $$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$\boxed{\text{Derivata di } \lambda f(x)}$ $\quad x_0$

Se f è derivabile in x_0 abbiamo che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

Moltiplico per λ e ottengo

$$\lambda f(x_0+h) = \lambda f(x_0) + \boxed{\lambda f'(x_0)}\, h + o(h)$$

— o —

$\boxed{\text{Derivata di } f \pm g}$ $\quad$ Sia $h(x) = f(x) \pm g(x)$

Sappiamo che
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$
$$g(x_0+h) = g(x_0) + g'(x_0)h + o(h)$$

Sommando

$$\underbrace{f(x_0+h) \pm g(x_0+h)}_{h(x_0+h)} = \underbrace{f(x_0) \pm g(x_0)}_{h(x_0)} + \underbrace{[f'(x_0) \pm g'(x_0)]}_{h'(x_0)}\, h + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

$\boxed{\text{Derivata di } f \cdot g}$ Sia $p(x) = f(x) \cdot g(x)$

Moltiplico le formule per $f(x_0+h)$ e $g(x_0+h)$.
Ottengo

$$\underbrace{\boxed{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h)}}_{p(x_0+h)} = \boxed{f(x_0)\cdot g(x_0)} \leftarrow p(x_0)$$

$$+ \boxed{\left[f(x_0)\,g'(x_0) + g(x_0)\,f'(x_0)\right]} h \quad \leftarrow p'(x_0)$$

$$+\, o(h) \leftarrow$$ Questo "mangia" tutti gli altri 6 termini

$$[f'(x_0)\,h]\cdot[g'(x_0)\,h] = [f'(x_0)\cdot g'(x_0)]\,h^2 = o(h)$$

$$[f'(x_0)\,h]\cdot o(h) = \underbrace{\boxed{f'(x_0)\cdot h\cdot \omega(h)}}_{\omega_1(h)}\,h$$

Derivata della composizione

$$c(x) = f(g(x))$$

$$c(x_0+h) = f(g(x_0+h))$$

SVILUPPO $g(x_0+h)$

$$= f\big(\underbrace{g(x_0)}_{y_0} + \underbrace{h\,g'(x_0) + o(h)}_{k}\big)$$

$f(y_0+k) =$
$f(y_0) + f'(y_0)k$
$+ o(k)$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{f(y_0)} + \underbrace{f'(g(x_0))}_{f'(y_0)}\,\underbrace{[h\,g'(x_0) + o(h)]}_{k} + o(k)$$

$$= \underbrace{f(g(x_0))}_{c(x_0)} + \underbrace{f'(g(x_0))\,g'(x_0)}_{c'(x_0)} \cdot h + o(h)$$

Calcolare la derivata di $\frac{1}{f}$

$\frac{1}{f}$ è la composizione di $f(x)$ e della funzione

$d(x) = \frac{1}{x}$. Detto meglio: se $d(x) = \frac{1}{x}$, allora

$$d(f(x)) = \frac{1}{f(x)} \qquad d'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$[d(f(x))]' \underset{\uparrow}{=} d'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$$

COMPOSIZIONE

APPENA FATTA

Usando questa

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' \underset{\uparrow}{=} f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \boxed{\left(\frac{1}{g}\right)'} =$$

PRODOTTO

$$= f' \cdot \frac{1}{g} + f\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f' \cdot g - f g'}{g^2}$$

Esempio

$$(\tan x)' = \left(\frac{\overset{f}{\sin x}}{\underset{g}{\cos x}}\right)' = \frac{\overset{f'}{\cos x} \cdot \overset{g}{\cos x} - \overset{f}{\sin x}\,\overset{g'}{(-\sin x)}}{\underset{g^2}{\cos^2 x}}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \longrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\searrow 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

DUE MODI DI SCRIVERE
LA STESSA COSA