MATEMATICA I

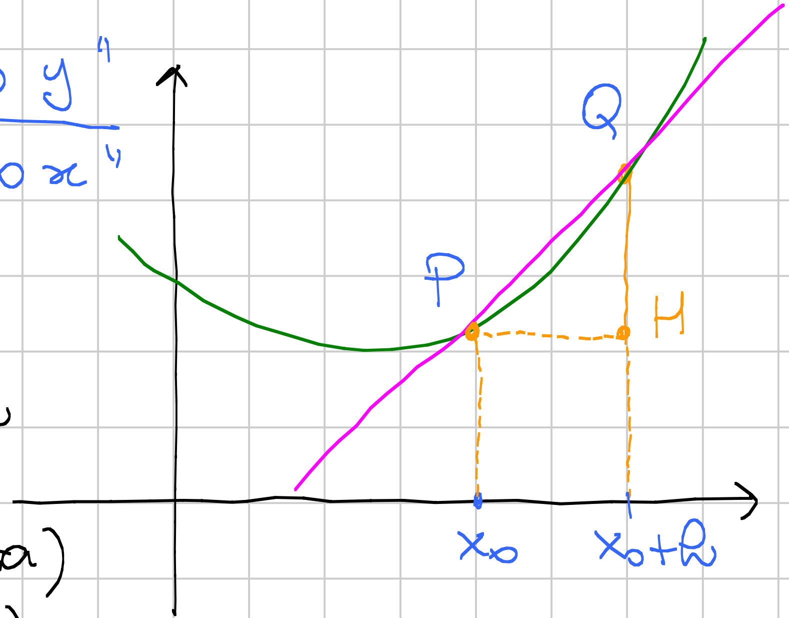
ORA 23

Titolo nota 17/10/2007

DERIVATE Ingredienti: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x_0 \in \mathbb{R}$

RAPPORTO INCREMENTALE Dato $h \neq 0$ definiamo

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{\text{"INCREMENTO } y\text{"}}{\text{"INCREMENTO } x\text{"}}$$



Quando mi sposto da x_0 a x_0+h
la variabile x ho incrementato di h

Nella variabile y (cioè nella quota)
sono passato da $f(x_0)$ a $f(x_0+h)$,
dunque ho un incremento di

$$f(x_0+h) - f(x_0)$$

Geometricamente: rapp. increm. $= \frac{HQ}{PH}$ (con segno)

$=$ coeff. angolare retta PQ.

Definizione Si dice che $f(x)$ è DERIVABILE nel punto x_0 se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ esiste ed è reale

Il valore del limite si DICE DERIVATA di f nel pto x_0 e si indica con uno di questi simboli

$$\frac{df}{dx}(x_0) \qquad f'(x_0) \qquad \dot{f}(x_0)$$

— o — o —

SIGNIFICATO GEOMETRICO: quando $h \to 0$, abbiamo che Q tende a P, la retta PQ tende a diventare la retta tg. al grafico in P, il rapp. increm. tende al coeff. angolare della rett. tg. al grafico in P.

— o — o —

$\boxed{\text{DIFFERENZIALE}}$ Ingredienti : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$.

Si dice che $f(x)$ è differenziabile nel punto x_0 se esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{f(x_0 + h) = f(x_0) + \alpha h + o(h) \quad \text{per } h \to 0}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ f è differenziabile in x_0

$$\Updownarrow$$

f è derivabile in x_0

Inoltre $\alpha = f'(x_0)$

Dim $\boxed{\Downarrow}$ Ipotesi: f è differenziabile in x_0
Tesi : f è derivabile in x_0

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \overset{\text{Uso ip.}}{=} \frac{\overbrace{\cancel{f(x_0)}+\alpha h+o(h)}^{f(x_0+h)}-\cancel{f(x_0)}}{h}$$

$$= \alpha + \underbrace{\boxed{\frac{o(h)}{h}}}_{\downarrow\, 0} \longrightarrow \alpha$$

Ho dimostrato che il rapp. increm. tende ad α, quindi f è deriv. in x_0 e $f'(x_0)=\alpha$.

$\boxed{\Uparrow}$ Ipotesi: f è derivabile in x_0 (cioè il rapp. incr. ha limite)
Tesi: f è diff. in x_0, cioè

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h)$$

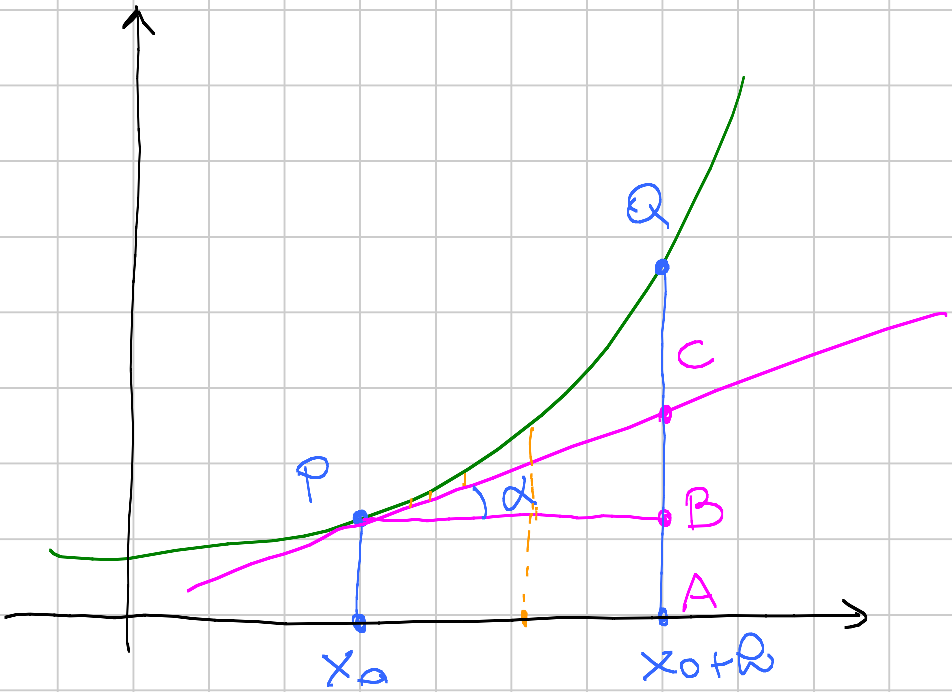
Devo quindi dimostrare che

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h = o(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)\,h}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \Bigg[\underbrace{\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} - f'(x_0) \Bigg] = 0 .$$

— o — o —



$f(x_0+h) = AQ$

$f(x_0) = AB$

$\frac{BC}{PB} = \tan\alpha =$ coeff. ang. retta tangente $= f'(x_0)$

$BC = f'(x_0) \cdot PB = f'(x_0) \cdot h$

$$AQ = AB + BC + CQ$$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + o(h)$$

Cosa succede quando $h \to 0$ ai 3 segmenti AB, BC, CQ

AB resta invariato
BC tende a zero "come h" (se dimezzo h, dimezzo BC)
Detto meglio: LINEARMENTE in h.

CQ tende a zero "più velocemente di h" e per questo è $o(h)$

— o — o —

Operativamente: scrivendo $f(x_0+h)$ nella forma come somma di 3 termini, il coefficiente di h è $f'(x_0)$

<u>Esempio 1</u> $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$

1° modo: limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 h + h^2 - \cancel{x_0^2}}{h} = \lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0$$

2° modo: differenziale

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + o(h)$$

$$(x_0+h)^2 = x_0^2 + 2x_0 h + h^2$$

$$= x_0^2 + \underbrace{\boxed{2x_0}}_{f'(x_0)} h + o(h)$$

Esempio 2 $\quad f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

1° modo: rapp. increm.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{x_0}\cdot e^{h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h\to 0} \left[e^{x_0} \underbrace{\boxed{\frac{e^{h}-1}{h}}}_{1} \right] = e^{x_0}$$

2° modo: differenziale

$$f(x_0+h) = e^{x_0+h} = e^{x_0}\cdot e^{h} = \text{SVILUPPINI}$$

$$= e^{x_0}\left(1+h+o(h)\right) = \underbrace{e^{x_0}}_{f(x_0)} + \underbrace{\boxed{e^{x_0}}h}_{f'(x_0)h} + \underbrace{o(h)}_{o(h)}$$

Esempio 3 $\quad f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$

1° modo: rapp. increm.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cdot \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h - \sin x_0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\sin x_0 \underbrace{\boxed{\frac{\cos h - 1}{h \cdot h}}}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\boxed{h}}_{\to 0} + \cos x_0 \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\sin h}{h}}}_{\to 1} \right] = \cos x_0$$

2° modo: $f(x_0+h) = \sin(x_0+h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \cdot \sin h$

$$= \sin x_0 \left(1 + o(h)\right) + \cos x_0 \left(h + o(h)\right)$$

$$= \sin x_0 + o(h) + \cos x_0 \cdot h + o(h)$$

$$= \underbrace{\sin x_0}_{f(x_0)} + \underbrace{\boxed{\cos x_0} \cdot h}_{f'(x_0)\cdot h} + o(h)$$

Provare per esercizio a fare il 1° modo usando

$$\sin(x_0+h) - \sin x_0$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = \dots$$