Limiti di funzioni - Definizioni

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

↑ molte cose funzionano anche se l'insieme di partenza è un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$

Sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$

$x_0 \nearrow \in \mathbb{R}$, $x_0 \to +\infty$, $x_0 \searrow -\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ avremo $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$

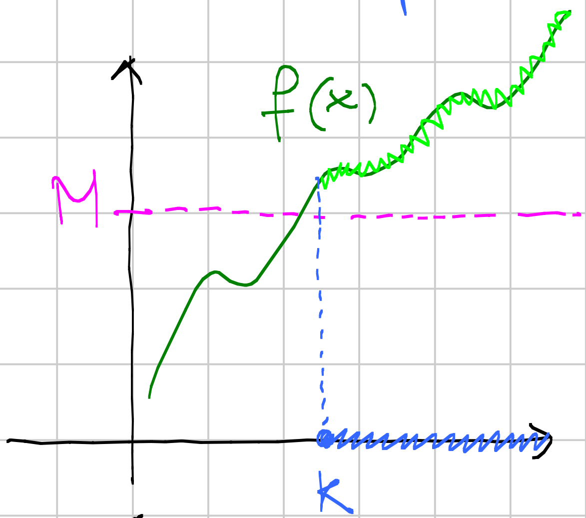
↑ limite da destra

↑ limite da sinistra

$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ $x_0 = +\infty$ (Caso + simile alle successioni)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & (1) \\ +\infty & (2) \\ -\infty & (3) \\ \text{NON ESISTERE} & (4) \end{cases}$$

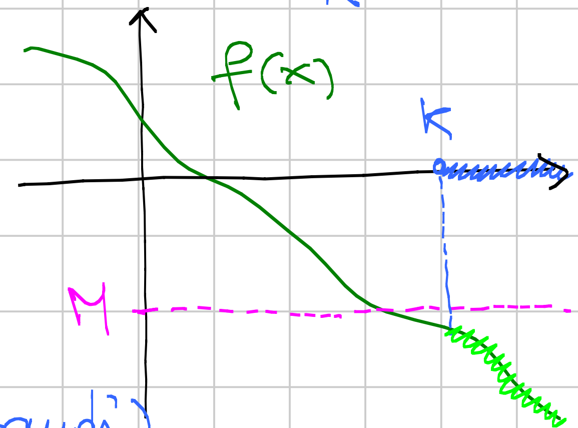
(4) Nessuno dei prec.



Def. (2) Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \geq K$



Def. (3) Si dice che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. negativo)

$\exists K \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \geq K$

(se un certo K va bene, vanno bene tutti i K + grandi)

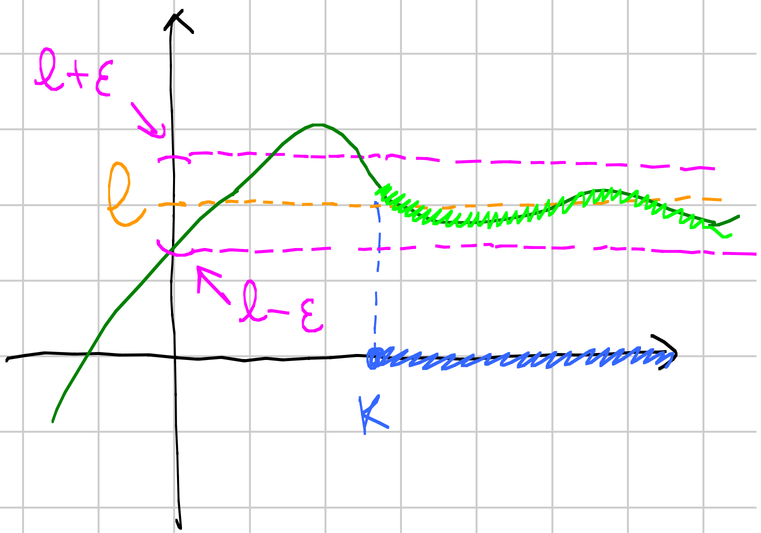
Def. 1 Si dice $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a zero)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$

$\forall x \geq k$

il grafico, per $x \geq k$, sta nella striscia compresa tra $l-\varepsilon$ ed $l+\varepsilon$

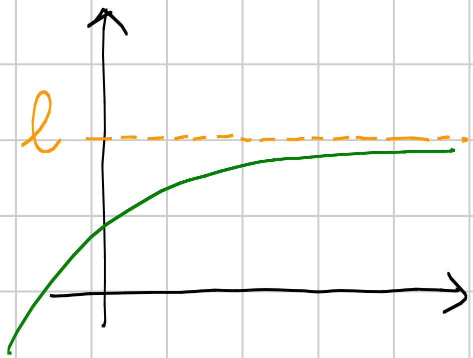


Varianti di 1: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^+$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l \boxed{<} f(x) \leq l + \varepsilon$

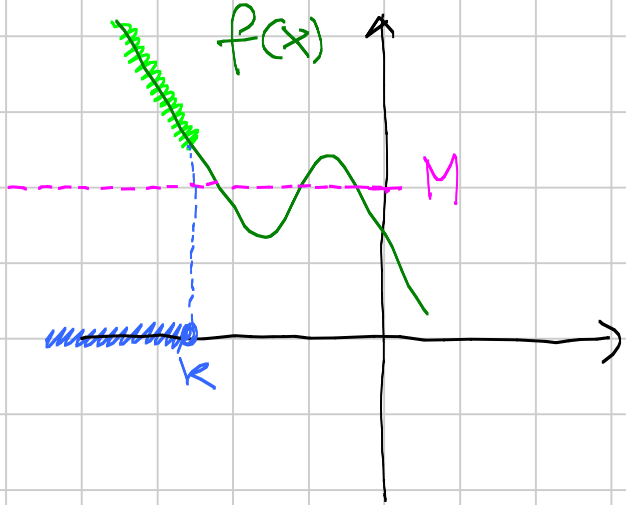
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l^-$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \boxed{<} l$ $\forall x \geq k$



$\boxed{2° \text{ Caso}}$ $x_0 = -\infty$

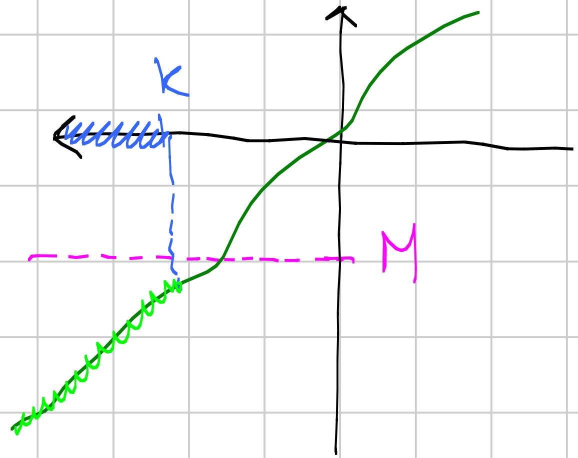
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{Non esiste} & ④ \quad \text{NDP} \end{cases}$$



Def. di ② Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \geq M \quad \forall x \leq k$

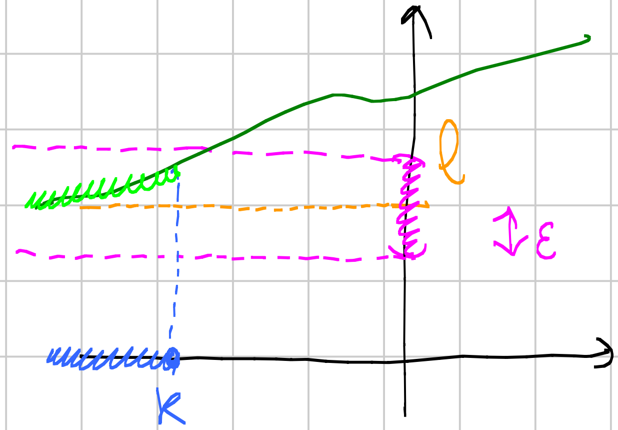


Def. di ③ Si dice che $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \leq k$

Def. 1 Si dice che $\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se



$\forall \varepsilon > 0$ (anche vicinissimo a 0)

$\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon \quad \forall x \leq k$

$$\downarrow$$

$$|f(x) - l| \leq \varepsilon$$

(altro modo di scrivere la stessa cosa

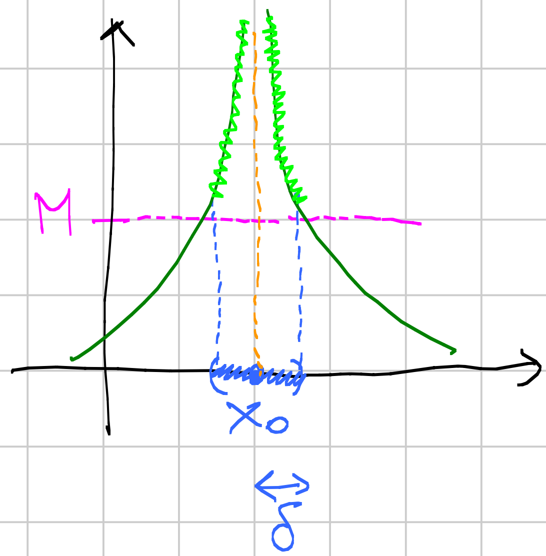
Analogamente a prima si definiscono

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l^+ \qquad \lim_{x\to -\infty} l^-$$

3° Caso $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{Non esiste} & ④ \end{cases}$$

NDP



Def. di ② Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \geq M$

$$\forall x \in \underbrace{[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}}_{\text{intorno di } x_0 \text{ di ampiezza } \delta \text{ meno il punto } x_0}$$

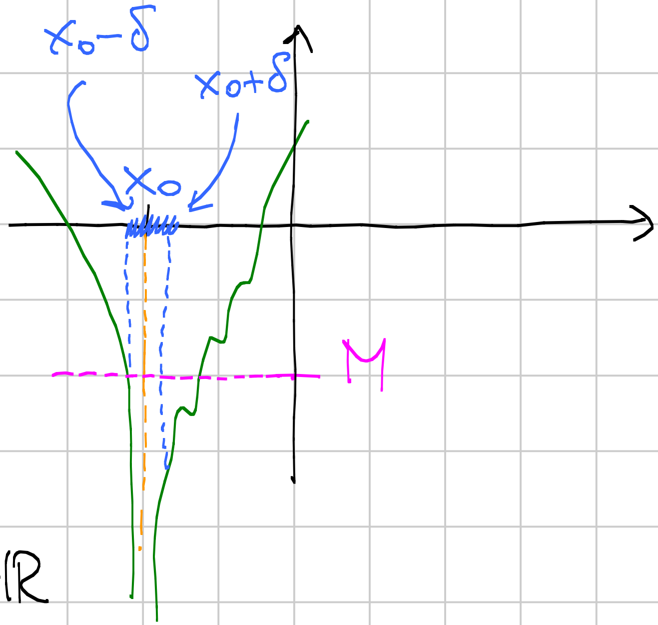
Il limite non considera quello che accade per $x = x_0$

<u>Def di</u> ③ Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche molto negativo)

$\exists \delta > 0$ t.c. $f(x) \leq M$

$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\}$



— o — o —

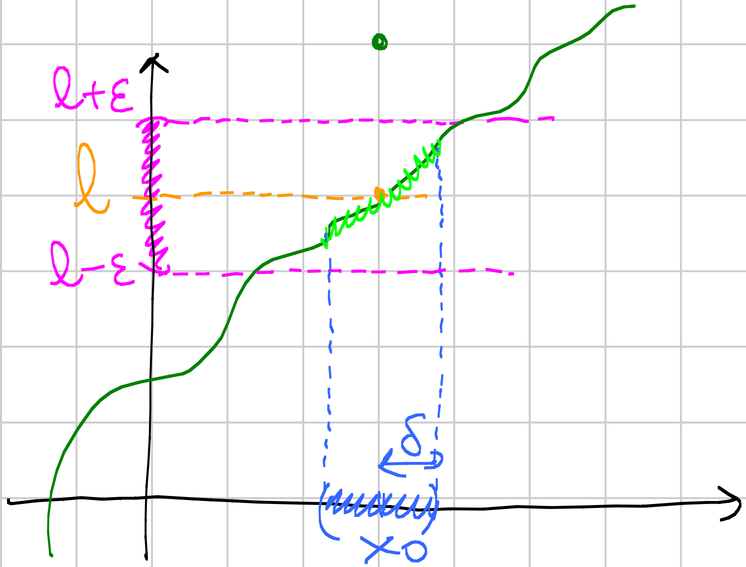
<u>Def. di</u> ① Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$

se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)

$\exists \delta > 0$ t.c. $l-\varepsilon \leq f(x) \leq l+\varepsilon$

$\forall x \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \setminus \{x_0\}$



NON IMPORTA QUANTO VALE $f(x_0)$