MATEMATICA I

ORA 11

Titolo nota 09/10/2007

Esempio 1 $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ Perché ?

$-1 \le \sin n \le 1$ Ovvio

Dividi per n (e conservo i versi perché $n > 0$)

$\boxed{-\frac{1}{n}} \le \boxed{\frac{\sin n}{n}} \le \boxed{\frac{1}{n}}$

$-\frac{1}{n} \to 0$ (teo. algebrico)

$\frac{\sin n}{n} \to 0$ (CARABINIERI)

$\frac{1}{n} \to 0$ (tabellina)

Esempio 2 $\lim_{n \to +\infty} \frac{\cos(n^2 + \sin n^3)}{\sqrt{n}} = 0$ (stesso motivo)

$-1 \le \cos(\text{Mostro}) \le 1$ divido per n...

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \le \boxed{\frac{\cos(\text{Mostro})}{n}} \le \boxed{\frac{1}{n}}$$

$$\downarrow 0 \qquad \downarrow 0 \qquad \downarrow 0$$

— o — o —

$$\lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$

Per dimostrarlo, si può o usare la definizione (farlo per esercizio) oppure la disug. $2^n \geq n$ dimostrata per induzione a suo tempo

$$\boxed{2^n} \geq \boxed{n}$$

$\boxed{2^n} \to +\infty$ (confronto a 2)

$\boxed{n} \to +\infty$ (tabellina)

Più in generale

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ 0 & \text{se } 0\le a<1 \\ 1 & \text{se } a=1 \end{cases}}$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI

Sia $x>-1$. Allora $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dim. per induzione. Passo base $n=0$ $\quad (1+x)^0 \geq 1$ ok.

Passo induttivo Hp $(1+x)^n \geq 1+nx$

Tesi $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

uso Hp

Dim. passo induttivo $\boxed{(1+x)^{n+1}} = (1+x)(1+x)^n \geq$

$\geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$

trascuro $nx^2 \geq 0$ $\rightarrow$ $\boxed{\geq 1+(n+1)x}$ TESI

Nel passaggio

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$

ho preso l'Hp $(1+x)^n \geq 1+nx$ e ho moltiplicato a dx e sx per $(1+x)$ conservando i versi.
Questo si può fare solo se $1+x>0$, cioè $x>-1$.

— o — o —

Dalla disug. segue che se $a>1$ posso scriverlo come

$$\underbrace{\boxed{a^n}}_{+\infty} = (1+(a-1))^n \underset{\uparrow}{\geq} \underbrace{\boxed{1+n(a-1)}}_{\text{se } a>1 \text{ questo tende a } +\infty}$$

confronto a 2.

DISUG. con $x = a-1$

— o — o —

Esempio 3

$$\frac{n^3+2}{3n^3+4n^2+5} = \frac{\cancel{n^3}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{2}{n^3}}}_{\to 0}\right)}{\cancel{n^3}\left(3+\underbrace{\boxed{\frac{4}{n}}}_{\to 0}+\underbrace{\boxed{\frac{5}{n^3}}}_{\to 0}\right)} \to \frac{1}{3}$$

Esempio 4

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+\cos(n^4)}{n^4+\cos(n^3)}$$

$$\frac{n^3+\cos(n^4)}{n^4+\cos(n^3)} = \frac{\cancel{n^3}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{\cos(n^4)}{n^3}}}_{\to 0}\right)}{n^{\cancel{4}}\left(1+\underbrace{\boxed{\frac{\cos(n^3)}{n^4}}}_{\to 0}\right)} \text{“}\to \frac{1}{\infty\cdot 1}\text{”} \to 0$$

$\frac{\cos(n^4)}{n^3} \to 0$ perché $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{\cos(n^4)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ come in esempio prec.

$\frac{\cos(n^3)}{n^4} \to 0$ stesso motivo

Esempio 5

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[4]{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{4}}} = -\infty$$

$$\frac{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{4}}} = \boxed{\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}}}} \frac{\left(n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} - 1\right)}{\left(1 - n^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}\right)} = \underbrace{\boxed{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}}}_{+\infty} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{\overbrace{\boxed{n^{-\frac{1}{6}}}}^{\to 0} - 1}{1 - \underbrace{\boxed{n^{-\frac{1}{12}}}}_{\to 0}}}}_{-1} \to$$

$$+\infty \cdot -1$$

Esempio 6

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) \qquad (= +\infty - \infty)$$

$$\sqrt{n^2+n} - n = \left(\overset{A}{\sqrt{n^2+n}} - \overset{B}{n}\right) \frac{\overset{A}{\sqrt{n^2+n}} + \overset{B}{n}}{\sqrt{n^2+n} + n} = \frac{\overset{A^2}{\cancel{n^2}+n} - \overset{B^2}{\cancel{n^2}}}{\sqrt{n^2+n} + n}$$

$$= \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \frac{n}{n\left(\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+1\right)} = \frac{\cancel{n}\ 1}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\boxed{\frac{1}{n}}}+1\right)} \to \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n} \to 0$$

— o — o —

SUCCESSIONI MONOTONE

$a_{n+1} \geq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	deb. cresc.	$a_m \geq a_n$	$\forall m \geq n$
$a_{n+1} > a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	strett. "	$a_m > a_n$	$\forall m \geq n$
$a_{n+1} \leq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	deb. decr.	$\vdots$	
$a_{n+1} < a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	strett. decr.		

TEOREMA Sia a_n debolm. cresc. Allora ci sono solo 2 possibilità

1. $a_n \to l \in \mathbb{R}$
2. $a_n \to +\infty$

In entrambe i casi il limite è l'estremo superiore della successione.

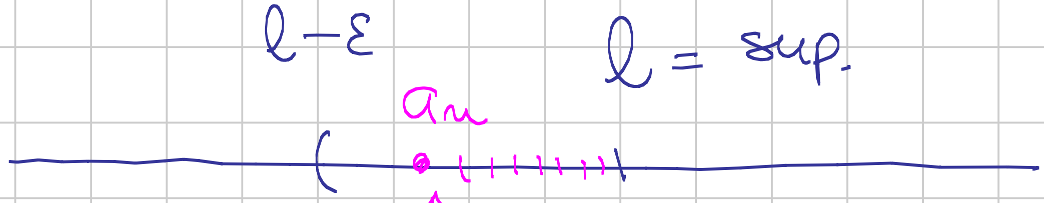
$\boxed{\text{Dim caso ②}}$ sup della succ. $= +\infty$

Questo vuol dire che $\forall M \in \mathbb{R}$ esiste un elemento della successione $\geq M$, cioè $\exists\, n$ t.c. $a_n \geq M$

Essendo a_n monotona, una volta che ha passato M non torna + indietro, dunque

$a_n \geq M$ definitivamente e questo serve per avere $\lim a_n = +\infty$.

$\boxed{\text{Disegno caso ①}}$



per def. di sup. almeno 1 volta supera $l-\varepsilon$ e poi per monotonia non torna indietro

$a_n \leq l$ sempre per definiz. di sup.