

MATEMATICA I

ORA II

Titolo nota

09/10/2007

Esempio 1 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$

Perché?

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

Ovvio

Divido per n (e conservo i versi perché $n > 0$)

$$\boxed{-\frac{1}{n}} \approx \boxed{\frac{\sin n}{n}} \approx \boxed{\frac{1}{n}}$$

0
(teo. algebrico)

0 (tabellina)

0 (CARABINIERI)

Esempio 2 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos(n^2 + \sin n^3)}{\sqrt{n}} = 0$ (stesso motivo)

$$-1 \leq \cos(\text{Mostro}) \leq 1 \quad \text{divido per } n \dots$$

$$\boxed{\frac{1}{3}} \xrightarrow{1/n} \boxed{\frac{\cos(n\theta)}{n}} \leq \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$$

$$2^n = +\infty$$

Per dimostrarlo, si può usare la definizione (fatto per esercizio) oppure la disug. $2^n \geq n$ dimostrata per induzione a suo tempo

$$\boxed{2^n} \geq \boxed{n}$$

$\downarrow +\infty$ (cresciuto a 2)

$\downarrow +\infty$ (tabellina)

Più in generale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 0 & \text{se } 0 \leq a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \end{cases}$$

DISUGUAGLIANZA DI BERNOLLI

Sia $x > -1$. Allora $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dim. per induzione. Passo base $n=0$ $(1+x)^0 \geq 1$ ok.

Passo induttivo Hp $(1+x)^n \geq 1+nx$

Tesi $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

Dim. passo induttivo $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq$

$$\geq (1+x)(1+nx) = 1+nx+x+nx^2 = 1+(n+1)x+nx^2$$

trascurando
 $nx^2 \geq 0$

$$\rightarrow \geq 1+(n+1)x \quad \text{TESI}$$

Nel passaggio

$$(1+x)(1+x)^m \geq (1+x)(1+mx)$$

ho preso l'Hp $(1+x)^m \geq 1+mx$ e ho moltiplicato a dx e sx per $(1+x)$ conservando i versi.

Questo si può fare solo se $1+x > 0$, cioè $x > -1$.

— 0 — 0 —

Dalla disug. segue che se $a > 1$ posso scriverlo come

$$a^m = (1+(a-1))^m \geq 1+m(a-1)$$

comparato
a 2.
↓
 $+\infty$

↑
DISUG. con
 $x = a-1$

se $a > 1$ questo
tende a $+\infty$

— 0 — 0 —

Esempio 3

$$\frac{n^3 + 2}{3n^3 + 4n^2 + 5} = \frac{\cancel{n^3} \left(1 + \frac{2}{n^3} \right)}{\cancel{n^3} \left(3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^3} \right)} \rightarrow \frac{1}{3}$$

Esempio 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 + \cos(n^4)}{n^4 + \cos(n^3)}$$

$$\frac{n^3 + \cos(n^4)}{n^4 + \cos(n^3)} = \frac{\cancel{n^3} \left(1 + \frac{\cos(n^4)}{n^3} \right)}{\cancel{n^4} \left(1 + \frac{\cos(n^3)}{n^4} \right)} \stackrel{''}{=} \frac{1}{\infty \cdot 1} \rightarrow 0$$

$\frac{\cos(n^4)}{n^3} \rightarrow 0$ perché $-\frac{1}{n^3} \leq \frac{\cos(n^4)}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ come in esempio prec.

$\frac{\cos(n^3)}{n^4} \rightarrow 0$ stesso motivo

Esempio 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[4]{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{4}}} = -\infty$$

$$\frac{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{4}}} = \frac{n^{\frac{1}{2}} \left(n^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}} - 1 \right)}{n^{\frac{1}{3}} \left(1 - n^{\frac{1}{4} - \frac{1}{3}} \right)} = \frac{n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} \left(n^{-\frac{1}{6}} - 1 \right)}{n \left(1 - n^{-\frac{1}{12}} \right)}$$

Diagram illustrating the simplification steps with annotations:

- The term $n^{\frac{1}{2}}$ in the numerator is boxed in blue.
- The term $n^{\frac{1}{3}}$ in the denominator is boxed in blue.
- The term $n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ is boxed in green.
- The term $n^{-\frac{1}{6}}$ in the numerator is boxed in blue, with a blue circle and arrow pointing to it.
- The term $n^{-\frac{1}{12}}$ in the denominator is boxed in blue, with a blue circle and arrow pointing to it.
- A green arrow points from the $n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ box to $+\infty$.
- A green arrow points from the $n^{-\frac{1}{12}}$ box to -1 .
- A large green box encloses the entire fraction $\frac{n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} (n^{-\frac{1}{6}} - 1)}{n (1 - n^{-\frac{1}{12}})}$.
- A large blue arrow points from the original limit expression to the final result $-\infty$.

Esempio 6

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \quad \left(= +\infty - \infty \right)$$

$$\sqrt{n^2 + n} - n = \left(\sqrt{n^2 + n} - n \right) \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} = \frac{\cancel{n^2} + n - \cancel{n^2}}{\sqrt{n^2 + n} + n}$$

Diagram illustrating the rationalization step with annotations:

- The term $\sqrt{n^2 + n}$ is labeled A in blue.
- The term n is labeled B in blue.
- The expression is written as $(\sqrt{n^2 + n} - n) \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n}$.
- The final result is $\frac{A^2 - B^2}{\sqrt{n^2 + n} + n}$.

$$= \frac{3}{\sqrt{m^2+m}+m} = \frac{3}{3 \left(\frac{\sqrt{m^2+m}}{3} + 1 \right)} = \frac{\cancel{3} \quad 1}{\cancel{3} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{3}} + 1 \right)} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{3}}}$$

SUCCESSIONI MONOTONE

$a_{n+1} \geq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	deb. cresc.	$a_m \geq a_n$	$\forall m \geq n$
$a_{n+1} > a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	strett. "	$a_m > a_n$	$\forall m \geq n$
$a_{n+1} \leq a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	deb. decr.		\vdots
$a_{n+1} < a_n$	$\forall n \in \mathbb{N}$	strett. decr.		

TEOREMA Sia a_n debolm. cresc. Allora ci sono solo 2 possibilità

① $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

② $a_n \rightarrow +\infty$

In entrambe i casi il limite è l'estremo superiore della successione.

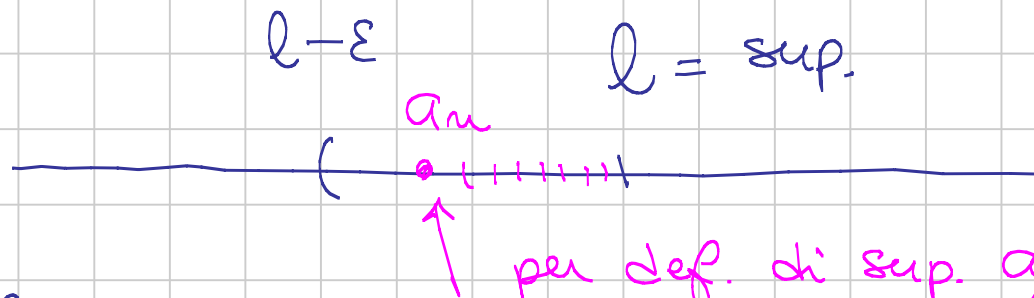
Dim caso ② sup della succ. = $+\infty$

Questo vuol dire che $\forall M \in \mathbb{R}$ esiste un elemento della successione $\geq M$, cioè $\exists n$ t.c. $a_n \geq M$

Essendo a_n monotona, una volta che ha passato M non torua + indietro, dunque

$a_n \geq M$ definitivamente e questo serve per avere $\lim a_n = +\infty$.

Disegno caso ①



$a_n \leq l$ sempre per definiz. di sup.

per def. di sup. almeno 1 volta supera $l - \varepsilon$ e poi per monotonia non torua indietro