MATEMATICA I

ORA 10

Titolo nota 09/10/2007

Limiti di successioni

Già visto: definizioni, $n^2 \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0$ $\left(\frac{1}{n} \to 0^+\right)$

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} n^\alpha = +\infty \quad \text{se } \alpha > 0}$$

Esempi $n^3 \to +\infty$ $\alpha = 3$

$\sqrt[2007]{n} \to +\infty$ $\alpha = \frac{1}{2007}$

Bisogna dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $n^\alpha \geq M$ defin.

$n^\alpha \overset{?}{\geq} M$ $\qquad n \geq M^{\frac{1}{\alpha}}$ $\leftarrow$ CONDIZIONE VERA DEFINITIV.

$\uparrow$ il verso rimane perché elevare ad un esponente positivo è una funzione strett. crescente

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0^+ \quad \text{se } \alpha<0}$$

Pongo $\alpha = -\beta$ (se $\alpha<0$, allora $\beta>0$)

Devo dim. che $0 < n^\alpha < \varepsilon$ (comunque fisso $\varepsilon>0$, questa deve essere vera definitiv.)

IMMEDIATA

$n^\alpha \overset{?}{<} \varepsilon$; $n^{-\beta} \overset{?}{<} \varepsilon$; $\frac{1}{n^\beta} \overset{?}{<} \varepsilon$; $1 \overset{?}{<} n^\beta \cdot \varepsilon$

$n^\beta \overset{?}{>} \frac{1}{\varepsilon}$ $\qquad n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/\beta}$ ← CONDIZ. VERA DEFINITIVAMENTE

<u>Esempi</u>

$\frac{1}{n} \to 0$ $\qquad \frac{1}{n^8} \to 0$ $\qquad \frac{1}{\sqrt[8]{n}} \to 0$

$\alpha = -1$ $\qquad \alpha = -8$ $\qquad \alpha = -\frac{1}{8}$

$\boxed{\text{Strumenti}}$ → Teo. CONFRONTO
→ Teo. ALGEBRICI

Teo. di CONFRONTO (CONFRONTO a 2)

Siano a_n e b_n 2 successioni tali che

$$a_n \leq b_n \quad \text{definitivamente}$$

Allora se $a_n \to +\infty$, anche $b_n \to +\infty$
se $b_n \to -\infty$, anche $a_n \to -\infty$

Idea se $a_n \to +\infty$ vuol dire che, fissato $M \in \mathbb{R}$,

$a_n \geq M$ definitiv., dunque anche $b_n \geq M$ definitiv.

il che basta per concludere che $b_n \to +\infty$

Teo. dei CARABINIERI (o CONFRONTO a 3)

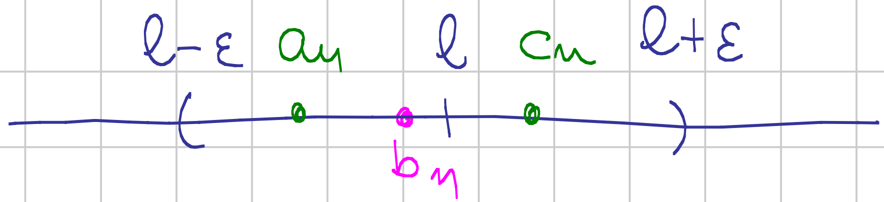
Siano a_n, b_n, c_n 3 successioni tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente}$$

Supponiamo che $\left.\begin{array}{l} a_n \to \ell \in \mathbb{R} \\ c_n \to \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\}$ stesso ℓ

Allora $b_n \to \ell$ (stesso ℓ)

Idea



$\left.\begin{array}{l} \text{Definitiv. } a_n \text{ sta in } [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon] \\ \quad " \qquad c_n \quad " \qquad\quad " \end{array}\right\}$ per forza anche b_n sta in $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$

TEO. ALGEBRICI

<u>Retta reale estesa</u> $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$ (è come dire $a_n \to l \in \mathbb{R}$ oppure $a_n \to +\infty$ oppure $a_n \to -\infty$)

Le operazioni classiche (somma, prodotto, divisione, ...) si estendono CON ALCUNE CAUTELE alla retta estesa

$16 + (+\infty) = +\infty$ $\quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty$

$-7 \cdot (-\infty) = +\infty$ $\quad 12 - (+\infty) = -\infty$

$\dfrac{12}{+\infty} = 0^{(+)}$ $\quad \dfrac{12}{-\infty} = 0^{(-)}$ $\quad (+\infty) - (+\infty) = \,?$

$\dfrac{0}{\pm\infty} = 0$ $\quad 0 \cdot (+\infty) = \,?$

Teoremi algebrici   Siano a_n e b_n 2 successioni. Supponiamo che

$$a_n \to \ell_1 \in \overline{\mathbb{R}} \qquad b_n \to \ell_2 \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora

$\boxed{\text{Somma}}$ $a_n + b_n \to \ell_1 + \ell_2$ tranne nei casi $\boxed{+\infty - \infty}$

$\boxed{\text{Prodotto}}$ $a_n \cdot b_n \to \ell_1 \cdot \ell_2$ tranne nei casi $\boxed{0 \cdot (\pm\infty)}$

$\boxed{\text{Quoziente}}$ Supponendo $b_n \neq 0$ definitiv. possiamo scrivere $\frac{a_n}{b_n}$. Allora

$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{\ell_1}{\ell_2}$ tranne (i) i casi $\boxed{\frac{0}{0}}$ e $\boxed{\frac{\pm\infty}{\pm\infty}}$

(ii) i casi in cui $\ell_2 = 0$ (qui è una questione di segno

$\boxed{\text{Esponenziale}}$ Supponendo $a_n > 0$ definitiv. posso scrivere $a_n^{b_n}$. Allora

$a_n^{b_n} \longrightarrow l_1^{l_2}$ tranne nei casi $\boxed{0^0}$, $\boxed{1^{\pm\infty}}$, $\boxed{(+\infty)^0}$

— o — o —

Cosa vuol dire che $+\infty - \infty$ è una forma indetermi-nata ?

Se io ho una successione $a_n \to +\infty$ e una succ. $b_n \to -\infty$ allora il comportamento di

$$a_n + b_n$$

non è prevedibile sapendo unicamente i limiti di a_n e b_n, $a_n + b_n$ può avere 4 tipi di comportamento, a seconda di come sono fatte a_n e b_n.

Esempio 1 $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{n^2}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{-n}_{\downarrow\, -\infty}$ FORMA INDETERMINATA

(con il teorema della somma non possiamo dire nulla)

$$n^2 - n = n(n-1) \longrightarrow +\infty$$ per il teo. del prodotto.

$$(+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$$

Esempio 2 $\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{n}}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{-n^2}_{-\infty}$

il teo della somma non permette di concludere

$$\sqrt{n} - n^2 = \sqrt{n}\left(1 - \frac{n^2}{\sqrt{n}}\right) = \underbrace{\sqrt{n}}_{+\infty}\cdot\underbrace{\left(1 - n^{3/2}\right)}_{(-\infty)} \longrightarrow -\infty$$

Esempio 3

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - 12 \sin n\right)$$

ho usato che $\sin n \leq 1$

$$\boxed{n^2 - 12 \sin n} \geq \boxed{n^2 - 12}$$

$n^2 - 12 \sin n \to +\infty$ (per confronto a 2)

$n^2 - 12 \to +\infty$ (per tabellina + teo. algebrici)

Esempio 4

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^4 - n^3 \cos(n^2+27)\right)$$

$$\boxed{n^4 - n^3\cos(n^2+27)} \geq n^4 - n^3 = \boxed{n^3(n-1)}$$

$n^4 - n^3\cos(n^2+27) \to +\infty$ per confronto a 2.

$n^3(n-1) \to +\infty$ (teo alg)