MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 8}}$

Titolo nota 05/10/2007

SUCCESSIONI e relativi limiti

Il termine DEFINITIVAMENTE. Sia P_n una proprietà con un parametro $n \in \mathbb{N}$ (a seconda del valore di n può essere vera o falsa). Si dice che P_n è vera DEFINITIV. se è vera da un certo punto in poi, cioè se esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. P_n è vera $\forall n \geq n_0$.

Definizione di successione → Burocratico; → Più elastico

Burocratico: una succ. è una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Di solito invece che $a(0), a(1), a(2), \dots$ si usa la notazione $a_0, a_1, a_2, \dots$.

Esempi:

$a_n = 7n + 5$ (ad ogni valore di n associa un numero reale)

$b_n = \sqrt{12n^3 + 61}$

$c_n = \frac{1}{n}$ (non è definita per $n=0$, dunque burocraticamente non è una succ.)

Definizione più elastica: non è nec. che sia definita per tutti gli $n \in \mathbb{N}$.
Basta che sia definita DEFINITIVAMENTE, cioè da un certo punto in poi
(le eccezioni SONO QUINDI un numero finito)

Esempi

$a_n = \frac{1}{n-8}$ per $n \geq 9$ OK

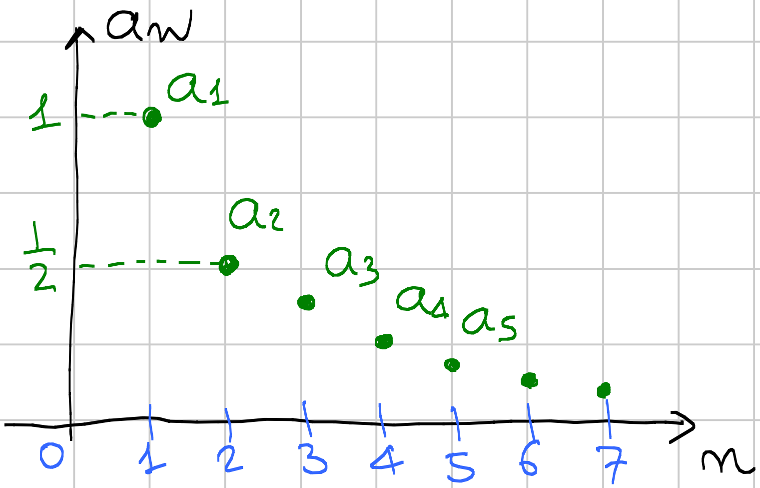
$b_n = \sqrt{n - 2007}$ per $n \geq 2007$ OK

$c_n = \log(2007 - n)$ NON è una successione

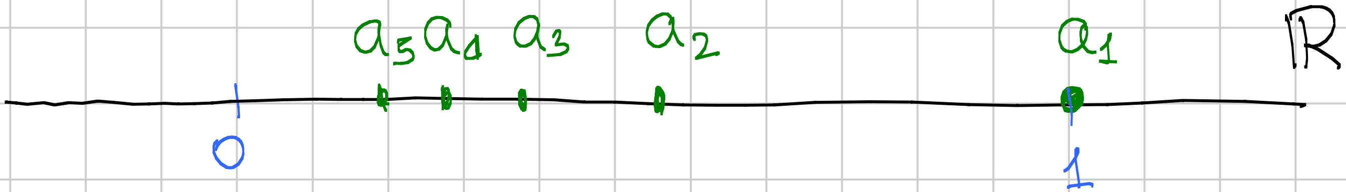
Come si può rappresentare una successione?

$\boxed{1° \text{ modo}}$: nel piano cartesiano

$$a_n = \frac{1}{n}$$



$\boxed{2° \text{ modo}}$: usando solo una retta



"Si può pensare ad una lampadina che si accende nel punto a_n al tempo $t = n$"

LIMITI DI SUCCESSIONI

Limite = "Comportamento della successione per valori molto grandi di n"

Una successione può fare 4 cose

① $a_n \to l \in \mathbb{R}$ (an tende al numero reale l)

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = l$$

② $a_n \to +\infty$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$

an tende a $+\infty$
an DIVERGE a $+\infty$
il limite ...

③ $a_n \to -\infty$ $\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty$

④ an è INDETERMINATA, an NON ha limite

Come si definiscono ?

Def. di 4 Nessuno dei precedenti

Def. di 2 Si dice che $a_n \to +\infty$ se

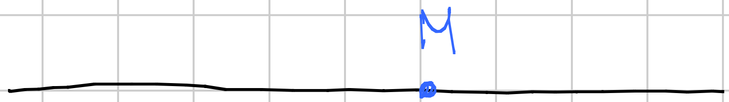
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)

$a_n \geq M$ DEFINITIVAMENTE

(se "spostiamo M a destra", la successione prima o poi starà al di sopra anche del nuovo M")

Def. di 3 Si dice che $a_n \to -\infty$ se

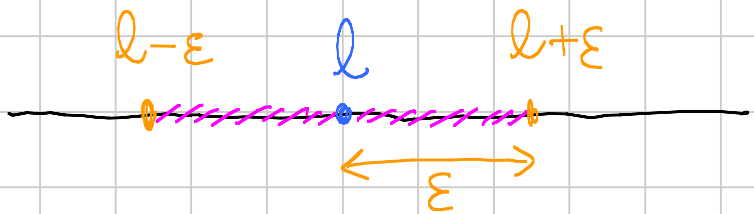
$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorm. negativo)



$a_n \leq M$ DEFINITIVAMENTE

$\boxed{\text{Def. di } ①}$ Si dice che $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0$ (anche molto vicino a 0)



$$\underbrace{\ell - \varepsilon \le a_n \le \ell + \varepsilon}_{\text{equivalente a } \underbrace{|a_n - \ell|}_{\text{distanza di } a_n \text{ da } \ell} \le \varepsilon} \quad \text{DEFINITIVAMENTE}$$

$\boxed{\text{Varianti della def. } ①}$ Si dice che $a_n \to \ell^+$ se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\ell \overset{\text{STRETTA}}{\boxed{<}} a_n \le \ell + \varepsilon$ definitivamente

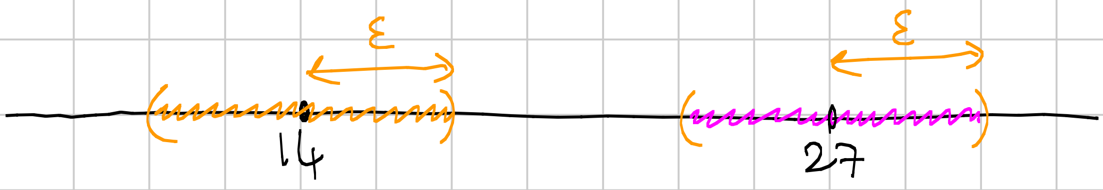
Si dice che $a_n \to \ell^-$ se

$\forall \varepsilon > 0$ si ha che $\ell - \varepsilon \le a_n \boxed{<} \ell$ definitivamente.

Osservazioni

$\boxed{1}$ Teorema di unicità del limite. Una succ. ha uno e uno solo dei comportamenti ①, ②, ③, ④. Se inoltre $a_n \to l \in \mathbb{R}$, allora l è unico.

Non può essere contemporaneamente $a_n \to 14$, $a_n \to 27$



se tende a 14 defin. sta qui

se tende a 27 defin. sta qui

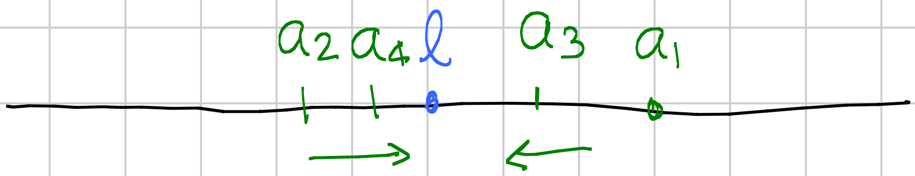
IMPOSSIBILE

$\boxed{2}$ Se $a_n \to l \in \mathbb{R}$ è vera per forza una delle 2 seguenti?

(i) $a_n \to l^+$

(ii) $a_n \to l^-$

No!!



Esempio 1 $\quad a_n = n^2 \qquad a_n \to +\infty$

Devo dimostrare che $\forall M \in \mathbb{R}$ si ha che $a_n \geq M$ definit.

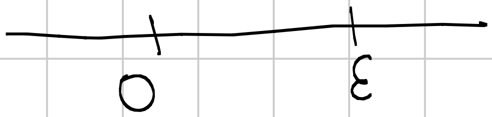
$$a_n \overset{?}{\geq} M \qquad n^2 \overset{?}{\geq} M \quad \text{vera se} \quad n \geq \sqrt{M}$$

Banale se $M < 0$

VERA DEFINITIV.

Esempio 2 $\quad a_n = \frac{1}{n} \qquad a_n \to 0$, anzi $a_n \to 0^+$

Devo dimostrare che $\forall \varepsilon > 0$



$0 < a_n \leq \varepsilon$ definitiv.

BANALE

$$a_n \overset{?}{\leq} \varepsilon \qquad \frac{1}{n} \overset{?}{\leq} \varepsilon \qquad n \geq \frac{1}{\varepsilon}$$

VERO DEF

Esempio 3 $\quad a_n = (-1)^n \qquad 1, -1, 1, -1, 1, -1$

a_n NON HA LIMITE