MATEMATICA I

$\boxed{\text{ORA 7}}$

Titolo nota 04/10/2007

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un sottoinsieme

<u>Def.</u> Si dice che un numero reale $b \in \mathbb{R}$ è un MAGGIORANTE di A se

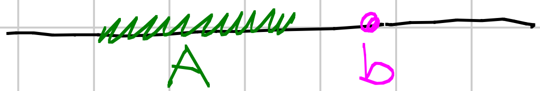
$$b \geq a \qquad \forall a \in A$$

Si dice che $b \in \mathbb{R}$ è un MINORANTE di A se

$$b \leq a \qquad \forall a \in A$$

<u>Oss.</u> ① Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ (non vuoto) maggioranti e minoranti NON sono obbligati ad esistere (basti pensare $A = \mathbb{Z}$)

② Se un maggiorante esiste, sicuramente <u>non</u> è UNICO



(tutti i reali $> b$ sono a loro volta maggioranti)

Def. Il sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ (non vuoto) si dice

SUPERIORMENTE LIMITATO se esiste un maggiorante
INFERIORMENTE LIMITATO " " " minorante

LIMITATO se è CONTEMPORANEAMENTE super. e infer. limitato

Def. Sia sempre $A \subseteq \mathbb{R}$. Dico che $M \in \mathbb{R}$ è il MASSIMO di A

$\underset{\text{INSIEME}}{\overset{}{A}}$ … $\underset{\text{NUMERO}}{M}$

e scrivo $M = \max A$ se

(i) $M \geq a \quad \forall a \in A$ (cioè M è un maggiorante)

(ii) $M \in A$ (cioè M è un elemento di A)

Analogamente dico che $m \in \mathbb{R}$ è il MINIMO di A

e scrivo $m = \min A$ se

(i) $m \leq a \quad \forall a \in A$ (cioè m è un minorante)

(ii) $m \in A$ (m sta in A).

Oss. ① Massimo e minimo NON sono obbligati ad esistere
② Se esistono sono unici

Esempi. ① $A = \mathbb{N}$, SI inferiormente limitato
(ad esempio -32 è un minorante)
NO superiormente limitato

$\sup = +\infty$
$\inf = 0$

NON ha max
HA MINIMO $m = 0$

② $A = \mathbb{Z}$ NON è limitato né super., né infer. $\sup = +\infty$
NON esistono né max, né min. $\inf = -\infty$

③ $A = (0, 1]$ SI super. limit. (8 è un maggior.)
escluso compreso SI infer. limit. (−24 è un minor.)
SI LIMITATO
Max $A = 1$ esiste
$\sup A = 1$ min A NON ESISTE
$\inf A = 0$ (in realtà 0 avrebbe tanta voglia di essere il minimo, ma non può perché non appartiene)

— o — o —

Definizione (estremo superiore e inferiore). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$

① Dico che $\sup A = +\infty$ (l'estremo superiore di A è $+\infty$) se A NON è limitato super., cioè non esistono maggioranti

② Dico che $\inf A = -\infty$ (l'estremo inferiore di A è $-\infty$) se A NON è lim. infer., cioè non esistono minor.

③ Dico che $\sup A = L \in \mathbb{R}$ (l'estremo superiore di A è il numero reale L)
se

(i) $L \geq a \quad \forall a \in A$ (L è un maggiorante)
(ii) L è il più piccolo dei maggioranti

④ Dico che $\inf A = l \in \mathbb{R}$ se

(i) $l \leq a \quad \forall a \in A$ (l è un minorante)
(ii) l è il più grande dei minoranti

—o—o—

Oss. $\boxed{1}$ Se esiste $M = \max A$, allora M è anche $\sup A$
$\boxed{2}$ Se $\sup A = L \in \mathbb{R}$ e $L \in A$, allora $L = \operatorname{Max} A$
dunque Max A in questo caso esiste

$\boxed{3}$ inf A e sup A SONO OBBLIGATI ad esistere (finiti o infiniti) e sono sempre UNICI

Il punto $\boxed{B}$ è un teorema importante.

Dim. (per il sup) Ci sono 2 casi

1° caso: se A NON ha maggioranti, allora $\sup A = +\infty$ per definizione e non c'è nulla da dimostrare

2° caso: supponiamo che esistano dei maggioranti di A.
Sia B l'insieme dei magg. di A.
Devo dimostrare che B ha il minimo (cosa non ovvia a priori)
Per definizione di maggiorante "B sta a destra di A"

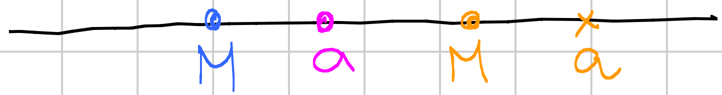
Per l'assioma di continuità esiste il "separatore", cioè un numero $c \in \mathbb{R}$ tale che

(i) $a \leq c \quad \forall a \in A$ (cioè c è un maggiorante di A) $c \in B$
(ii) $c \leq b \quad \forall b \in B$ (cioè c è più piccolo di tutti i maggioranti)
$\rightsquigarrow$ c è il sup

Caratterizzazione di sup (e inf.)

Dire che $\sup A = +\infty$ è equivalente alla seguente affermazione

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists a \in A$ t.c. $a \geq M$



Idem per l'inf.

Dire che $\sup A = L$ è equivalente alle seguenti 2 affermazioni

(i) $a \leq L \quad \forall a \in A$

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ (anche piccolissimo)
$\exists a \in A$ t.c. $a \geq L - \varepsilon$