MATEMATICA I

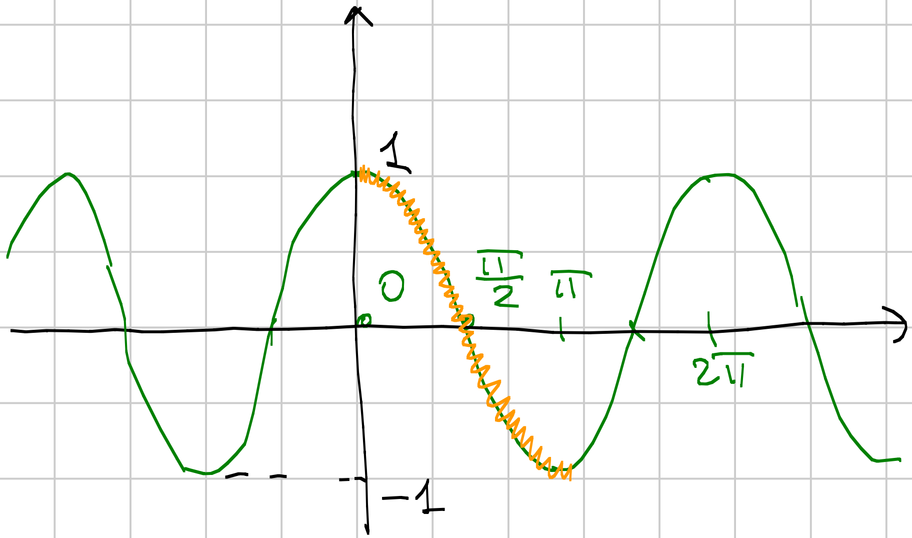
ORA 6

Titolo nota 04/10/2007

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = \cos x$

PARI $\qquad \cos(-x) = \cos x$

PERIODICA di periodo minimo 2π



NO INIETTIVA

NO SURGETTIVA

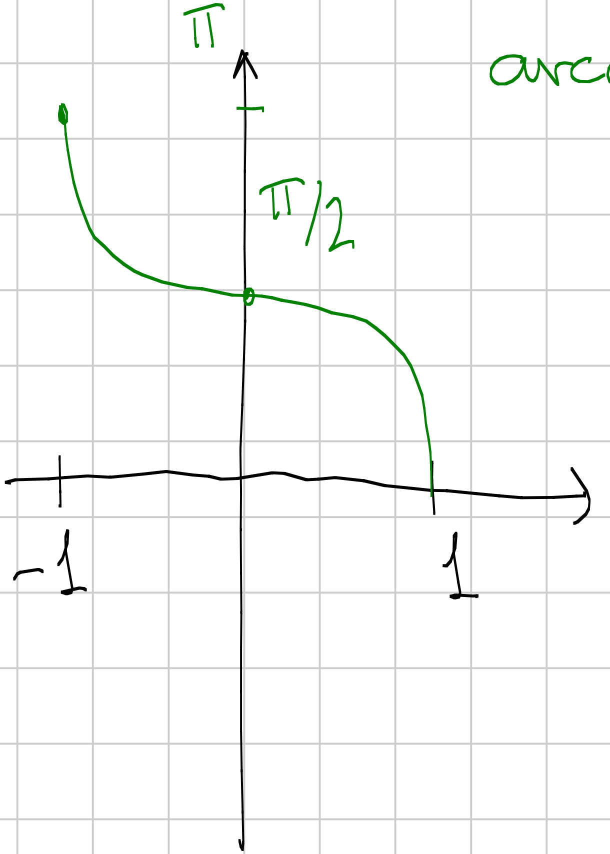
Considero la restrizione $f: [0, \pi] \to [-1, 1]$

Questa è INIETTIVA, SURGETTIVA, stretto. decrescente

La sua inversa è una funzione $g: [-1, 1] \to [0, \pi]$

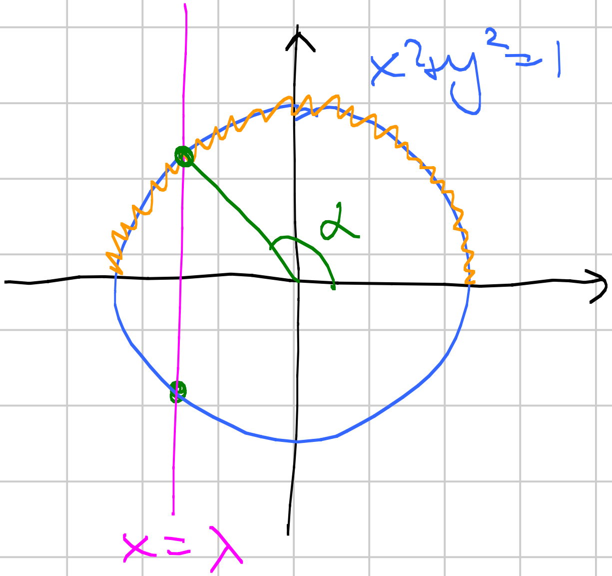
INPUT $\qquad$ OUTPUT

$$g(x) = \arccos x$$



arccos λ è l'unico valore $\alpha \in [0, \pi]$ t.c. $\cos\alpha = \lambda$

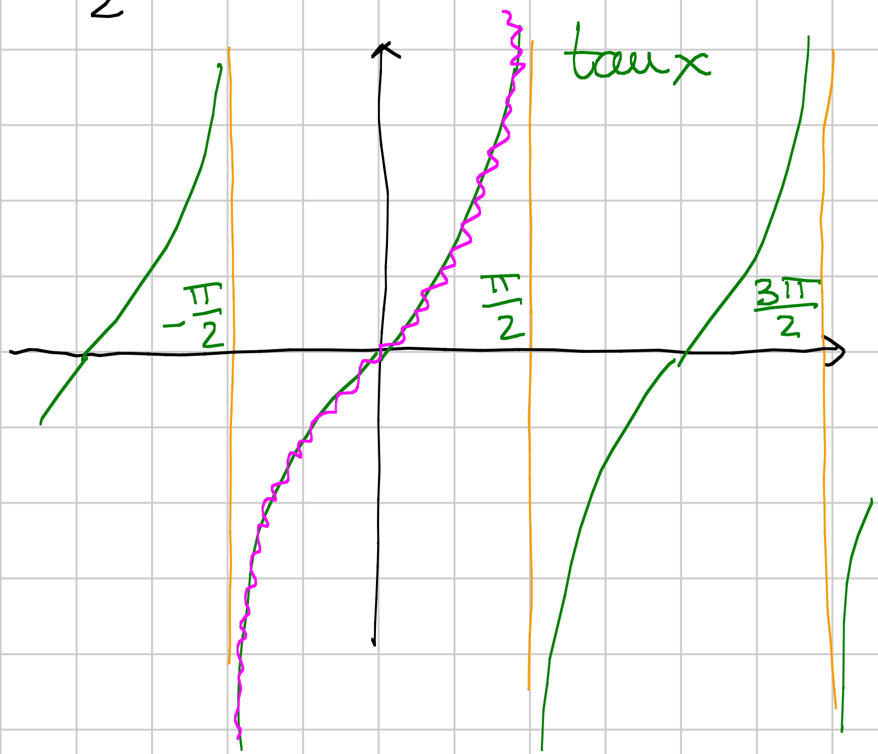
Interpretazione nella circ. trigonometrica



arccos x non è pari
non è dispari
è monotona strett. decrescente.

$f(x) = \tan x$ $\qquad$ $f : A \to \mathbb{R}$

$A = \mathbb{R}$ meno i punti del tipo $\frac{\pi}{2} + k\pi$ con k intero



DISPARI $\qquad \tan(-x) = -\tan x$

PERIODICA di periodo minimo π

NO INIETTIVA
SI SURGETTIVA

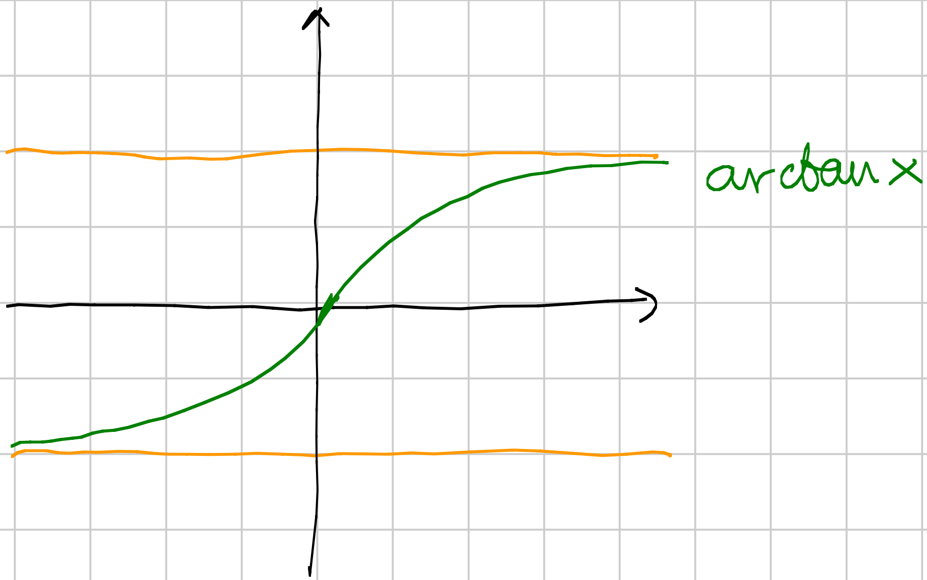
Considero la restrizione

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$$

iniettiva, surgettiva, strett. crescente, dunque invertibile.

La sua inversa è la funzione

$g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $\qquad g(x) = \arctan x$

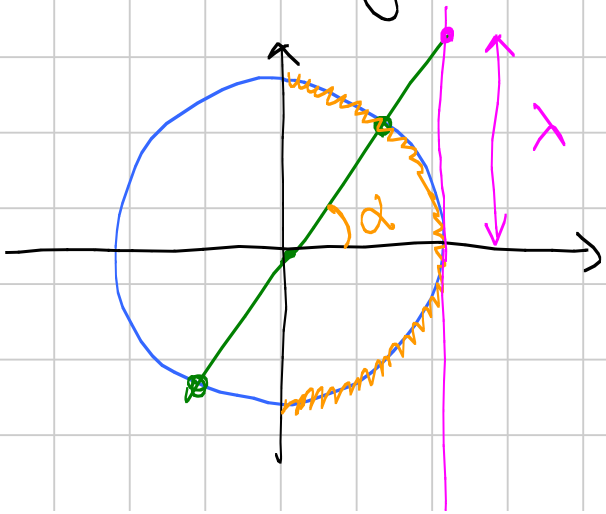


arctan x è

DISPARI e

strett. crescente

Sulla circ. trigonometrica



$\alpha = \arctan \lambda$

reale qualunque

INSIEMI NUMERICI $\rightsquigarrow$ INF e SUP

Insiemi numerici:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ = numeri naturali

$\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ = interi relativi

Z dal tedesco ZAHLEN

$\mathbb{Q} = \{$ frazioni $\frac{m}{n}$ in cui $m \in \mathbb{Z}$, $\underbrace{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}_{n \in \mathbb{Z},\, n \neq 0}$ $\}$ = numeri razionali

quozienti

$\mathbb{R}$ = "tutti i numeri" = numeri reali (in corrispondenza con i punti di una retta)

$\mathbb{C}$ = numeri complessi

Proprietà dei numeri reali

1. Algebriche : ci sono 2 operazioni (somma e prodotto) con le usuali proprietà
2. Ordinamento
3. Assioma di continuità

Proprietà di ordinamento Dati 2 numeri reali x, y allora si ha che $x \leq y$ oppure (VEL) $y \leq x$

(O1) $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ RIFLESSIVA

(O2) se $x \leq y$ e $y \leq x$, allora $x = y$ ANTISIMMETRICA

(O3) se $x \leq y$ e $y \leq z$, allora $x \leq z$ TRANSITIVA

Proprietà che legano ordinamento e operazioni

(OS) se $x \le y$, allora $x+z \le y+z$ $\forall z \in \mathbb{R}$

(OP) se $x \le y$, allora $xz \le yz$ $\boxed{\forall z > 0}$

(OPbis) se $x \le y$, allora $xz \ge yz$ $\forall z < 0$

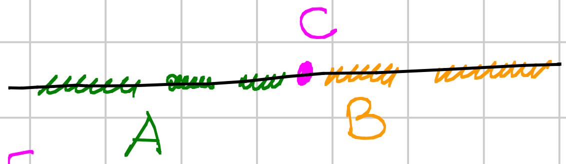
VERSO INVERTITO

— o — o —

Cosa distingue $\mathbb{Q}$ da $\mathbb{R}$? **ASSIOMA DI CONTINUITÀ**

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ due sottoinsiemi non vuoti.
Supponiamo che "A stia a sinistra di B", cioè

$$a \le b \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$



SEPARATORE

Allora esiste un numero reale $\boxed{c \in \mathbb{R}}$ t.c.

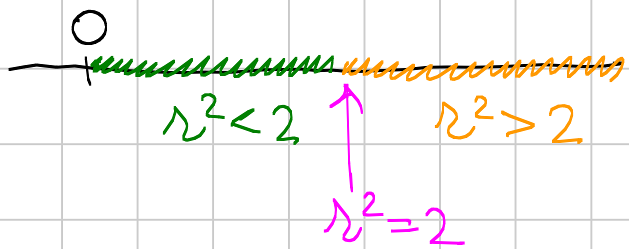
$$a \le c \le b \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Questa proprietà è vera in $\mathbb{R}$, ma non è vera in $\mathbb{Q}$.

<u>Esempio</u>

$$A = \{ r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 < 2 \}$$

$$B = \{ r \in \mathbb{Q} : r > 0 \text{ e } r^2 > 2 \}$$



Non c'è nessun numero razionale che fa da separatore.

Se ci fosse, il suo quadrato dovrebbe essere 2 e non ci sono razionali con quadrato = 2.