MATEMATICA

ORA 4

Titolo nota 03/10/2007

FUNZIONI REALI

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Il grafico è un sottoinsieme del piano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

INSIEME NUMERI REALI

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

PROPRIETÀ DI SIMMETRIA

PARI se $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

DISPARI se $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

PERIODICA se esiste un numero $T > 0$ tale che

periodo

$$f(x+T) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

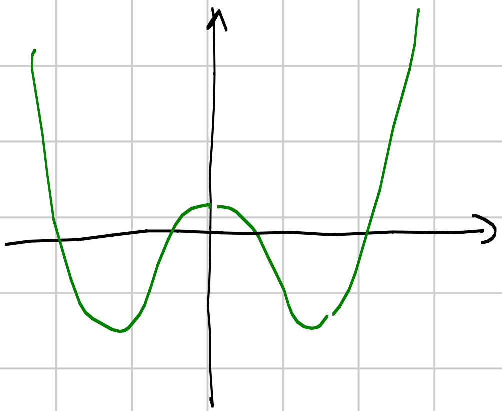
In tal caso, il + piccolo $T > 0$ che va bene (se esiste) si dice PERIODO MINIMO.

Come si traducono le propr. di simmetria sul grafico

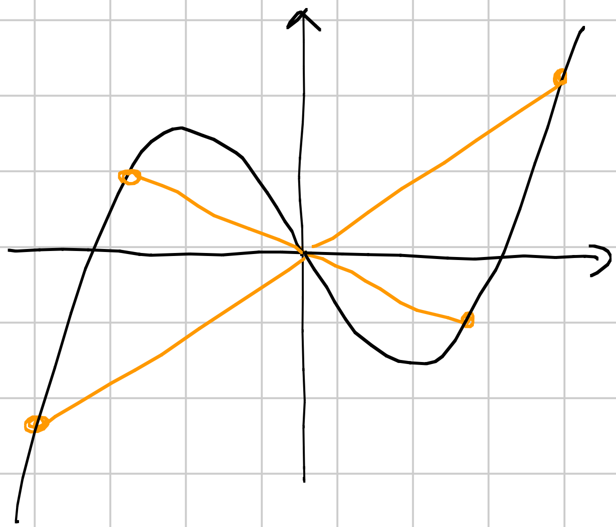
Funzione pari $\iff$ grafico simm. risp. asse y

" dispari $\iff$ " " " all'origine

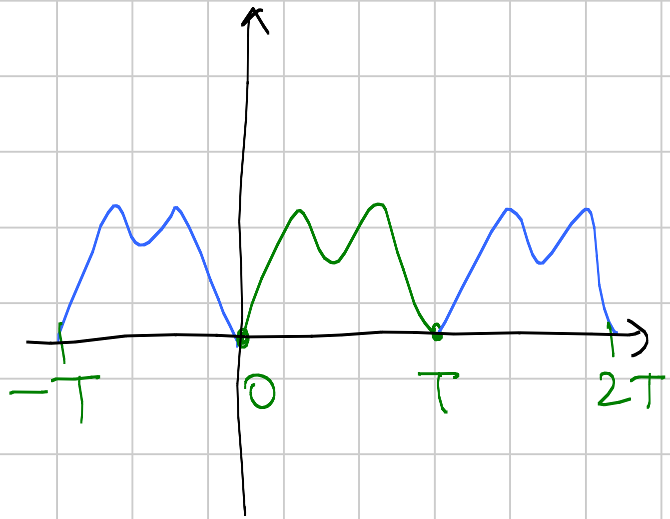
" periodica $\iff$ "il modulo per $x \in [0,T]$" si ripete uguale a se stesso all'infinito



PARI



DISPARI



PERIODICA

Se f è dispari, di sicuro $f(0)=0$ → basta mettere $x=0$ nella def.

$\boxed{\text{FUNZIONI MONOTÒNE}}$ Una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

DEBOLMENTE CRESCENTE se $y > x \Rightarrow f(y) \geq f(x)$

STRETTAMENTE CRESCENTE se $y > x \Rightarrow f(y) > f(x)$

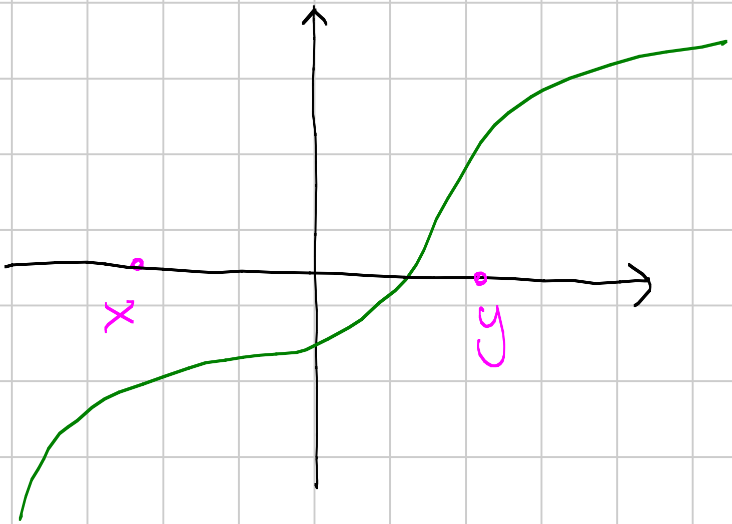
DEB. DECRESCENTE se $y > x \Rightarrow f(y) \leq f(x)$

STRETT. DECRESCENTE se $y > x \Rightarrow f(y) < f(x)$

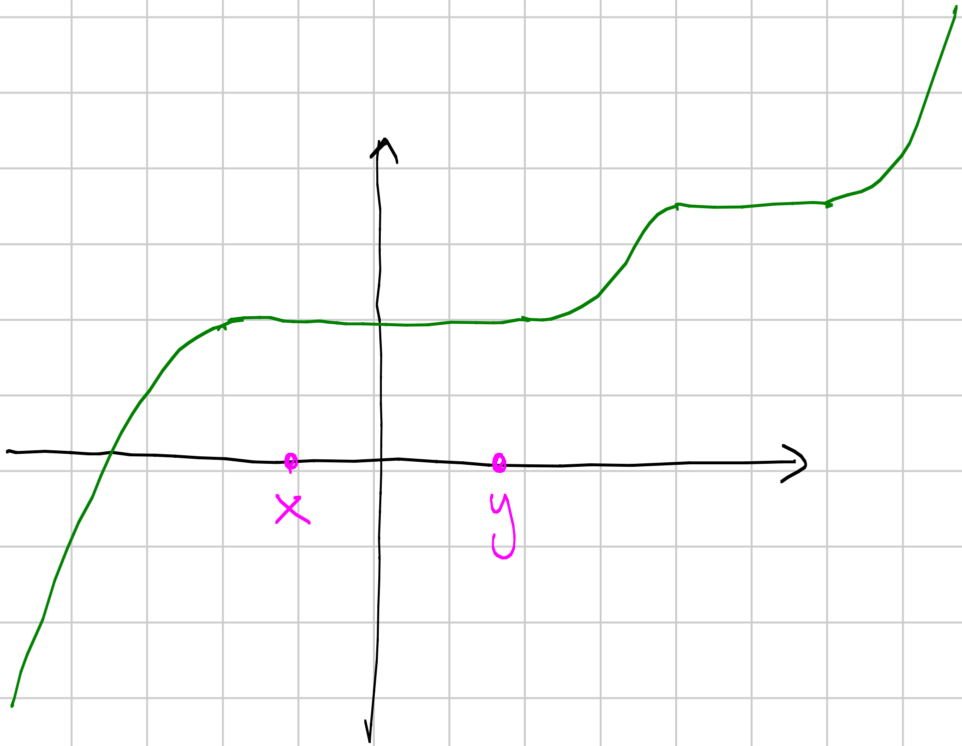
$\boxed{\text{Oss.}}$ Se una funzione è strettamente crescente, allora è anche debolmente crescente.
IDEM per le decrescenti

Oss. Quando f non è definita su tutto $\mathbb{R}$ si intende che x e y variano nell'insieme di definizione e non su tutto $\mathbb{R}$.

Monotonia e grafico

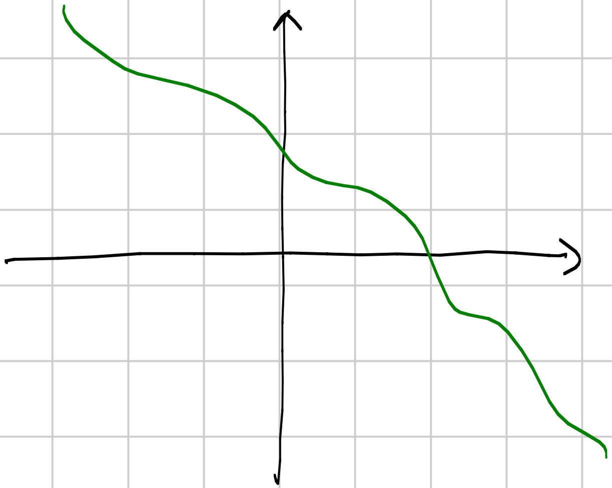


strett. crescente
deb. crescente

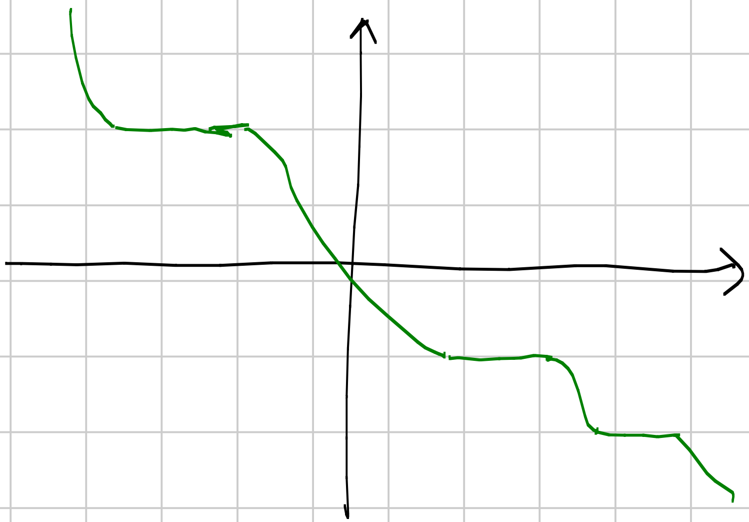


debol. crescente, ma non strett. crescente

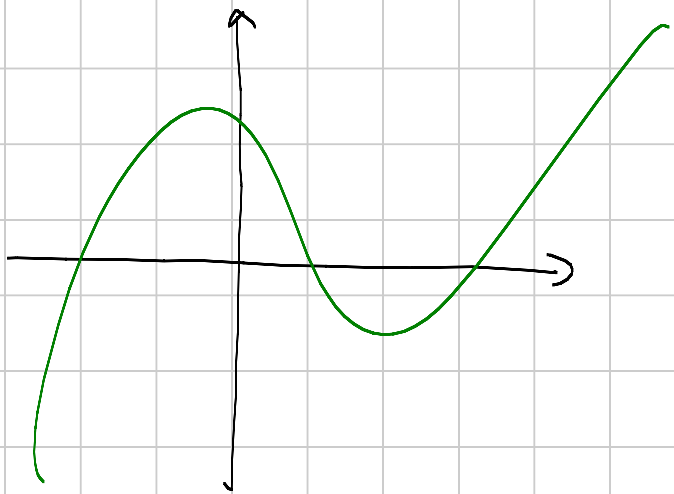
$y > x$, ma $f(y) = f(x)$ e non $>$



strett. e deb. decr.



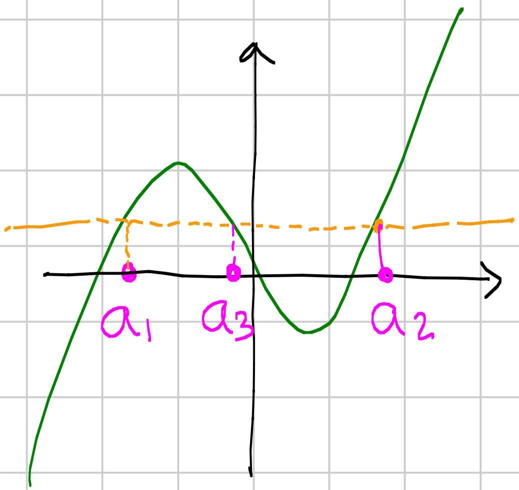
deb. decr., ma non strett. decr.



← Non è né deb. cresc. né deb. decresc.

Una funzione non è obbligata ad essere MONOTONA (uno dei 4 casi di sopra)

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Come si vedono nel grafico iniettività e surgettività?

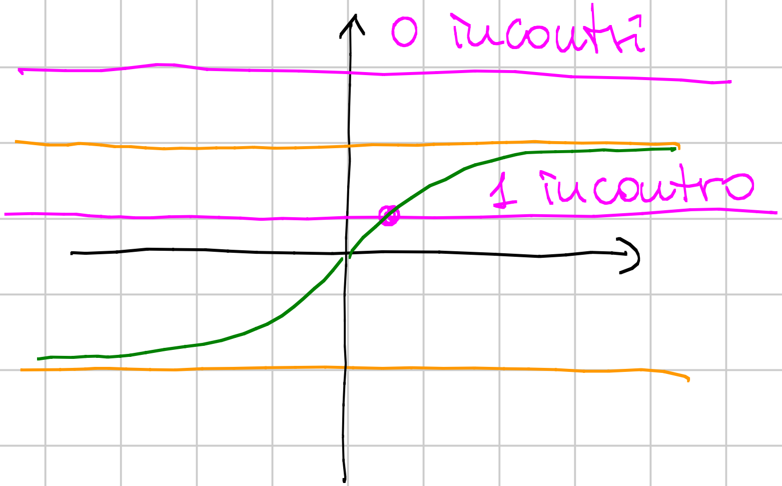


Non è iniettiva, perché esistono valori diversi a_1, a_2 dell'insieme di partenza con $f(a_1) = f(a_2)$

Nel grafico a_1, a_2, a_3 sono 3 valori distinti in cui f assume lo stesso valore.

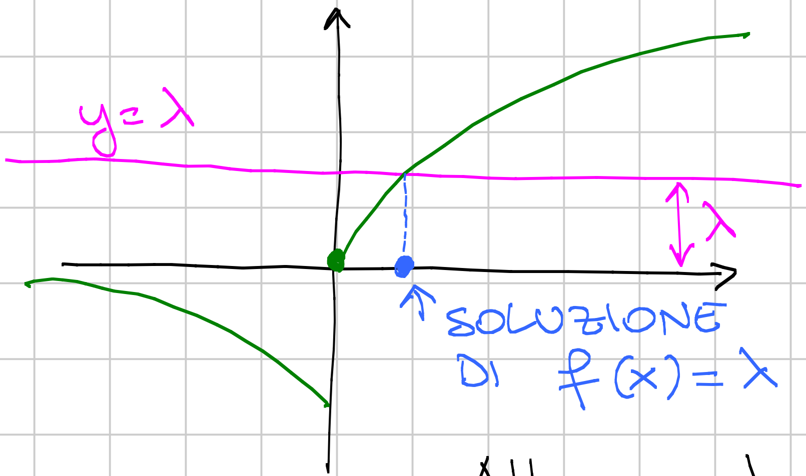
UNA FUNZIONE È INIETTIVA $\Longleftrightarrow$ OGNI RETTA PARALLELA ALL'ASSE x INCONTRA IL GRAFICO AL MASSIMO UNA VOLTA (CIOÈ 0 o 1 VOLTE)

Conseguenza: se esiste una // all'asse x che incontra il grafico 2 o + volte, allora f non è iniettiva



È iniettiva.

Ci sono // asse x che incontrano il grafico 0 volte e // che lo incontrano 1 volta



Non è monotona perché ha un tratto ↘ e un tratto ↗

Tuttavia è INIETTIVA

Altro modo di dire la stessa cosa

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se l'eq. $f(x) = \lambda$ ha al MASSIMO una soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ È SURGETTIVA

$\Updownarrow$

IL GRAFICO INTERSECA OGNI PARALLELA ALL'ASSE x ALMENO UNA VOLTA

In termini di equazioni

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva $\iff$ l'equazione $f(x) = \lambda$ ha ALMENO una soluzione per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

In particolare: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è BIGETTIVA (dunque INVERTIBILE) se e solo se

- ogni // all'asse x interseca il grafico UNA e UNA SOLA volta

o equivalentemente

- $f(x) = \lambda$ ha un'unica soluzione $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

NOTA BENE: in tal caso $\boxed{x = f^{-1}(\lambda)}$

FUNZIONE INVERSA