MAT I TLC — 3!!

$\boxed{\text{ORA } 98}$

Titolo nota — 20/12/2006

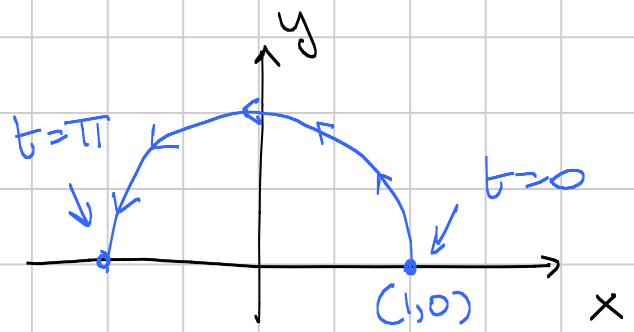
CURVE, LUNGH. CURV., INTEGRALI CURVILINEI

Curva in $\mathbb{R}^2$: funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = (x(t), y(t))$$

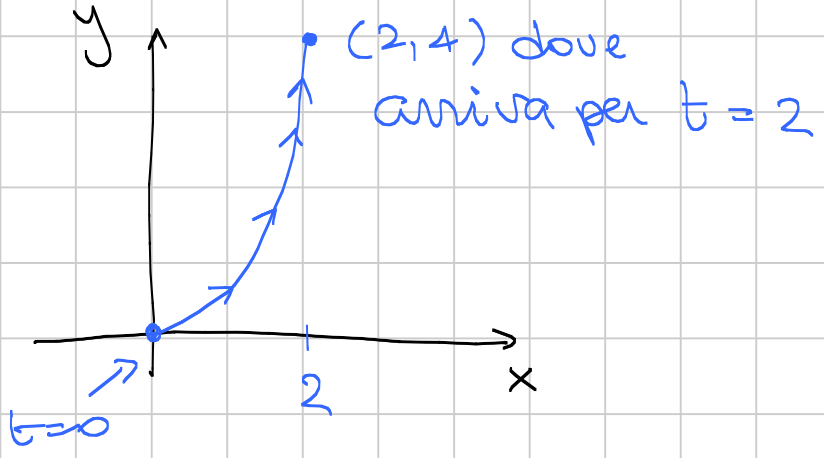
2 componenti di un punto P nel piano che varia con il parametro t (tempo)

Esempio 1 $\quad \gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0, \pi]$



Esempio 2

$\gamma(t) = (t, t^2) \qquad t \in [0,2]$



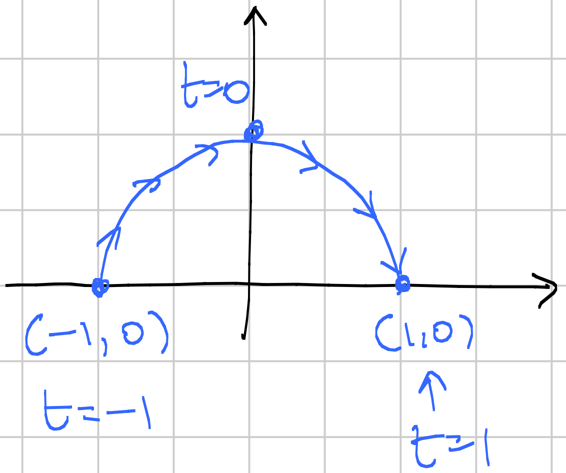
Esempio 3

$\gamma(t) = \left(t, \sqrt{1-t^2}\right) \qquad t \in [-1,1]$

$y = \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = 1 - x^2$

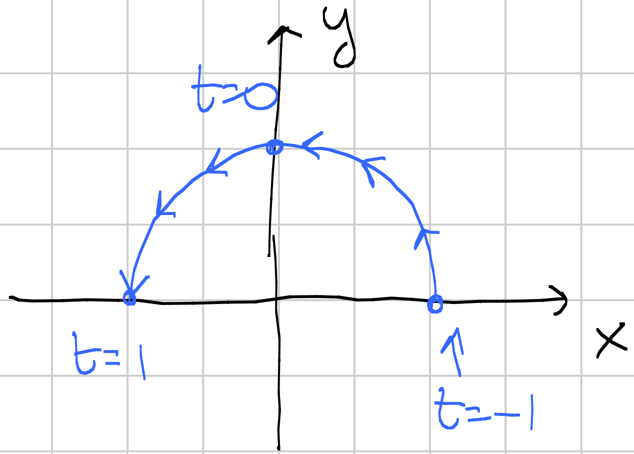
$x^2 + y^2 = 1$



Esempio 4

$$\gamma(t) = \left(-t, \sqrt{1-t^2}\right)$$

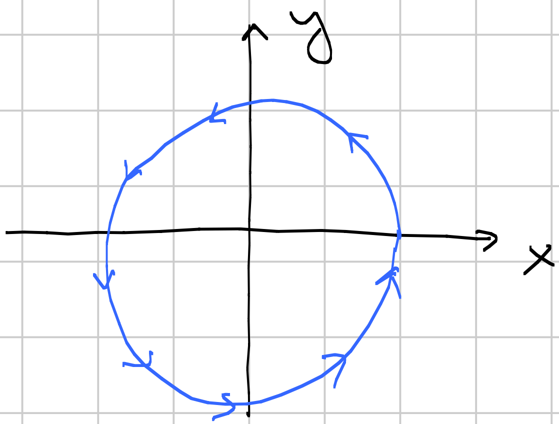
$$t \in [-1,1]$$



Esempio 5–6

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi] \qquad$ 1 GIRO

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 4\pi] \qquad$ 2 GIRI



LUNGHEZZA DI UNA CURVA

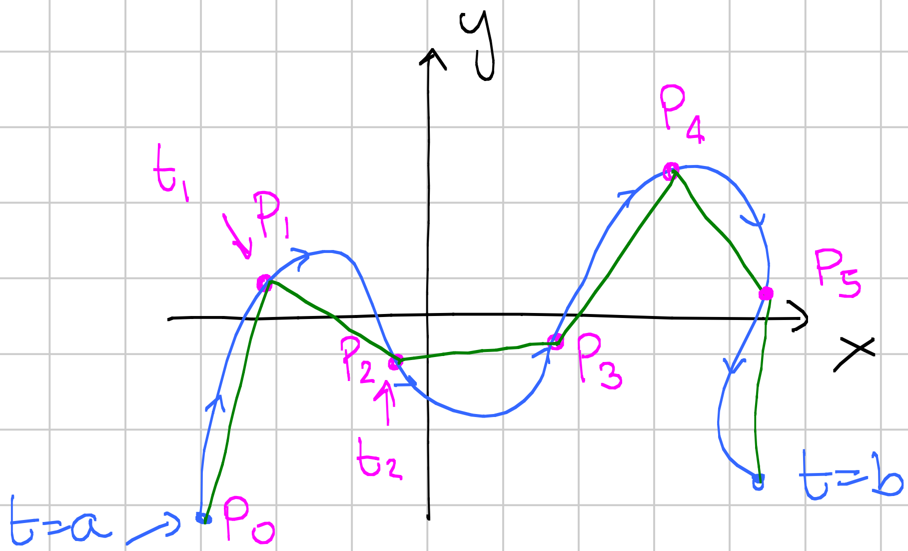
1. significato geometrico → INTUITIVO

2. Come si definisce

3. Come si calcola

$\boxed{2}$ $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$t \in [a, b]$



Con la procedura descritta approssimiamo la traiettoria percorsa "dalla curva" con una spezzata (unione di segmenti).

È intuitivo che l'approssimazione migliora quando aumento il numero dei punti del campionamento.

Si definisce lunghezza della curva l'<u>estremo superiore</u> delle lunghezze delle poligonali (spezzate) approssimanti.

Caso banale: segmento
Caso semi-banale: spezzata
Caso generale: approssimazione con spezzate $\rightsquigarrow$ sup.

3. $\boxed{\text{COME SI CALCOLA}}$ Si può dimostrare che per una curva

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \qquad t \in [a,b]$$

con $x(t)$ e $y(t)$ decenti (ad esempio con derivata continua)

si ha che

$$\text{lungh. curva} = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

<u>Esempio</u> $\gamma(t) = (\underset{x(t)}{\underset{\shortparallel}{\cos(t)}}, \underset{y(t)}{\underset{\shortparallel}{\sin(t)}}) \qquad t \in [0, \pi]$

$x'(t) = -\sin(t) \qquad\qquad y'(t) = \cos(t)$

$$\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t)} = 1$$

$$\text{Lungh.} = \int_0^\pi \sqrt{\dots}\, dt = \int_0^\pi dt = \pi$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Se due curve percorrono lo stesso insieme del piano una sola volta, allora la loro lunghezza è la stessa.

Brutalmente: lungh. di una curva = quello che segna il contakilometri.

Commenti fisici

$(x(t), y(t))$ rappresenta la posizione al tempo t di un punto che si muove nel piano

VELOCITY : velocità come vettore $(x'(t), y'(t))$

SPEED : velocità come scalare, cioè la norma della velocity

$$\text{speed} = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

Lunghezza = integrale risp. al tempo della speed

Spazio = velocità · tempo

— o — o —

INTEGRALE CURVILINEO

Ingredienti: * una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$

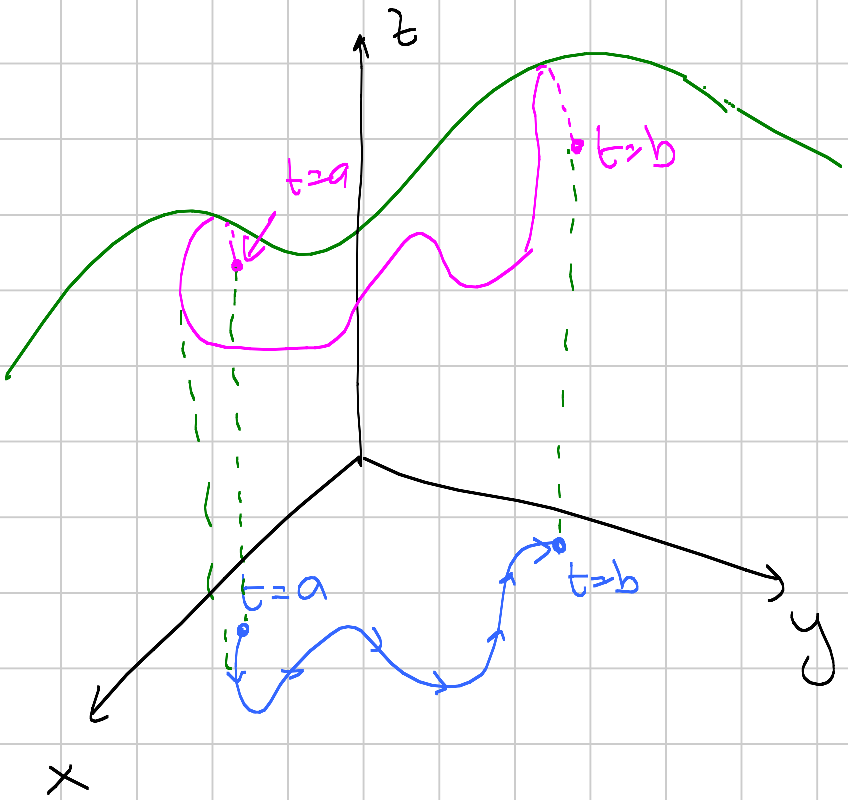
* una funzione $f(x,y)$ di 2 variabili definita su $\mathbb{R}^2$ (o almeno dove passa la curva) a valori reali

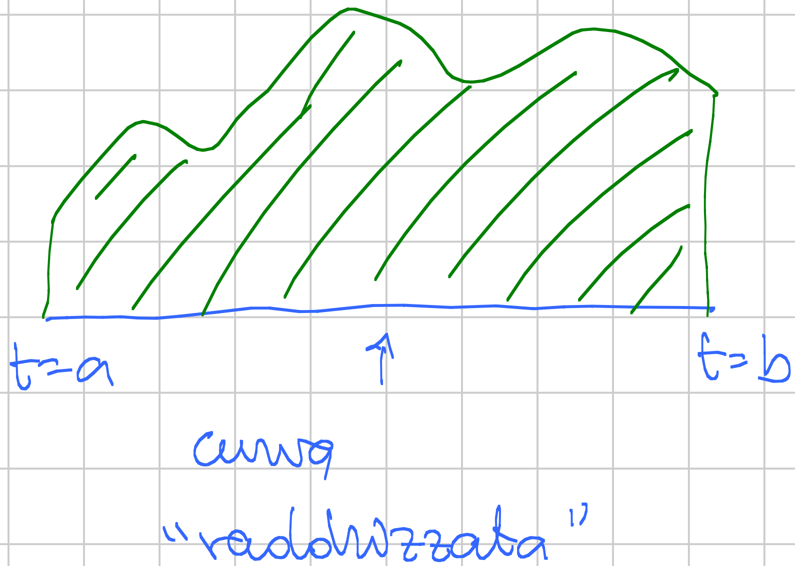
Si definisce integrale di f lungo la curva γ il numero

integr. curvilineo

$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt}$$

curva





Integrale curvilineo = area sotto il profilo altimetrico della tappa.

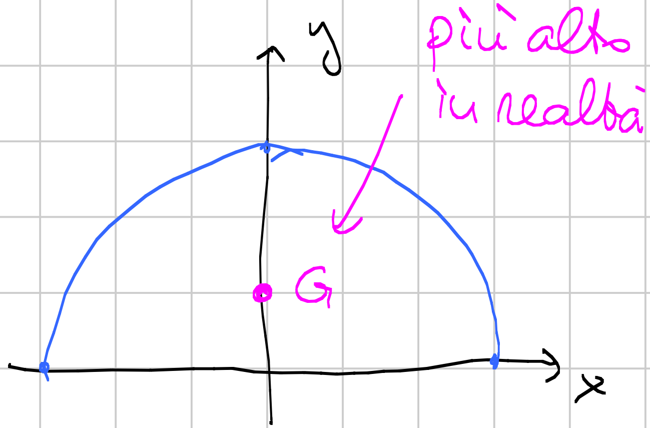
$\boxed{\text{BARICENTRO DI UNA CURVA}}$ Data una curva

$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad t \in [a,b]$, il suo baricentro è il punto

$G = (x_G, y_G)$, dove

$$x_G = \frac{1}{\text{Lungh}(\gamma)} \int_\gamma x \, ds ; \qquad y_G = \frac{1}{\text{Lungh}(\gamma)} \int_\gamma y \, ds$$

<u>Esempio</u> Baricentro di una semicirconferenza (centro in $(0,0)$ e raggio 1)



Scelgo la parametrizzazione

$$\gamma(t) = (\underset{x(t)}{\cos(t)}, \underset{y(t)}{\sin(t)}) \quad t \in [0, \pi]$$

Il risultato sarebbe lo stesso con ogni altra parametrizzazione (ad esempio $\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2})$ $t \in [-1,1]$), ma con sin e cos i calcoli vengono + semplici !!!

Speed : $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = 1$ $\qquad \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

Lunghezza : π

$$\int_\gamma x \, ds \underset{\text{DEF}}{=} \int_0^\pi \cos(t) \cdot \overset{\text{SPEED}}{1} \, dt = 0$$

Ho messo $x(t)$ al posto di x

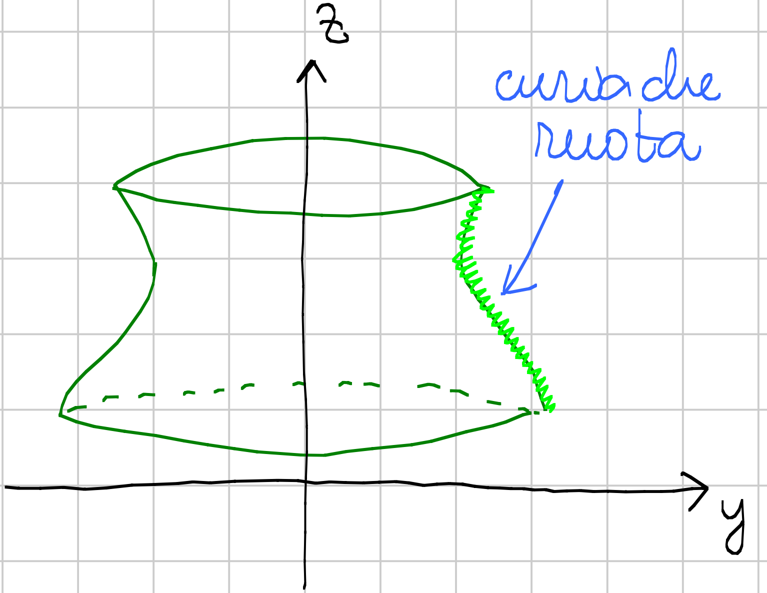
$\Rightarrow$ $x_G = 0$ (come era ovvio per simmetria)

$$\int_\gamma y \, ds = \int_0^\pi \underbrace{\sin(t)}_{y(t)} \, dt = 2$$

SPEED = 1

$$\Rightarrow \quad y_G = \frac{1}{\text{Lungh}} \int_\gamma y \, ds = \frac{2}{\pi}$$ (SOPRA $\frac{1}{2}$!!!)

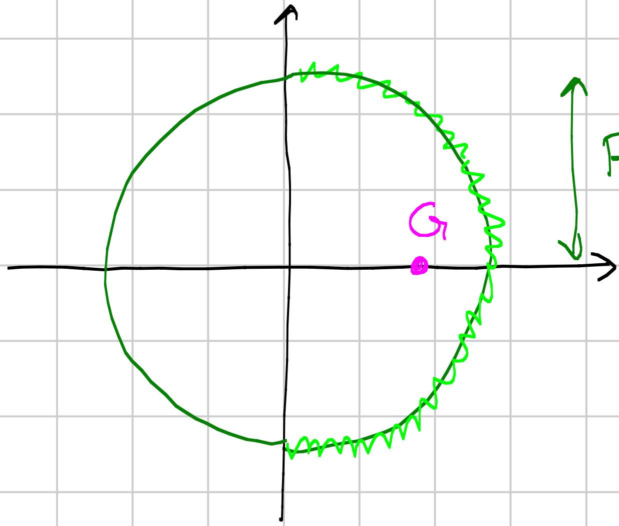
$\boxed{\text{GULDINO 2}}$ L'area della superficie laterale di un solido di rotazione è data da



$$\text{Area} = \underset{\text{che ruota}}{\text{lungh. curva}} \cdot 2\pi \, y_G$$

coordinata y del baricentro della curva che ruota

Esempio 1 Sfera



$$\text{Sup. sfera} = \text{lungh. semicirc.} \cdot 2\pi\, y_G$$

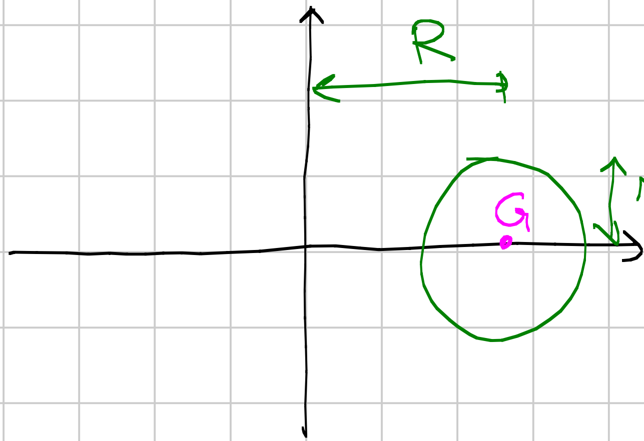
$$= \frac{1}{\cancel{2}}\, \cancel{2}\pi R \cdot 2\cancel{\pi} \cdot \boxed{\frac{2}{\cancel{\pi}} R}$$

calcolo baricentro fatto prima

$$= 4\pi R^2$$

—o—o—

Esempio 2 Toro



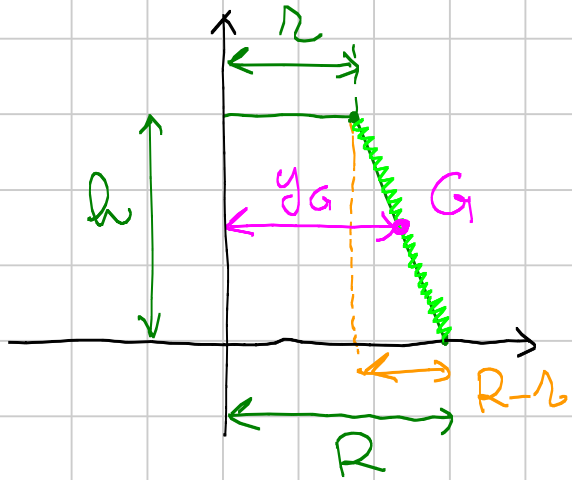
$$\text{Sup.} = \text{Lungh. curva} \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

Esempio 3 Tronco di cono

Sup. lat. = lungh. curva $\cdot$ $2\pi y_G$

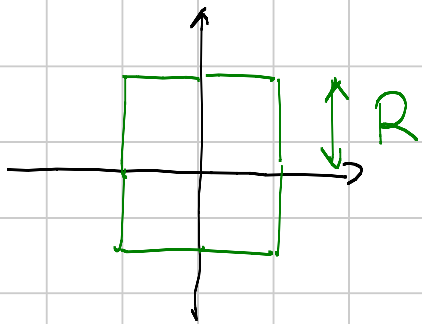
$$= \sqrt{R^2 + (R-r)^2} \cdot 2\pi \frac{R+r}{2}$$



$\boxed{\text{Oss.}}$ Vol. sfera $= \frac{4}{3}\pi R^3$ Sup. sfera $= 4\pi R^2$

Area cerchio $= \pi R^2$ Lungh. circ. $= 2\pi R$

Area quadrato $= L^2$ Perimetro quadr. $= 4L$ NON FUNZIONA



Area $= (2R)^2$
$= 4R^2$

Perimetro $= 8R$

FUNZIONA !!!

Esercizio Calcolare il volume dell'insieme

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+z^2 \leq 1, \ y^2+z^2 \leq 1\}$$

È limitato? SI Dalla 1ª eq. x e z stanno in $[-1,1]$
Dalla 2ª eq. anche y sta in $[-1,1]$

$x^2+z^2 \leq 1 \longrightarrow$ cilindro infinito con asse lungo asse y e raggio $=1$

$y^2+z^2 \leq 1 \longrightarrow$ " " asse lungo asse x

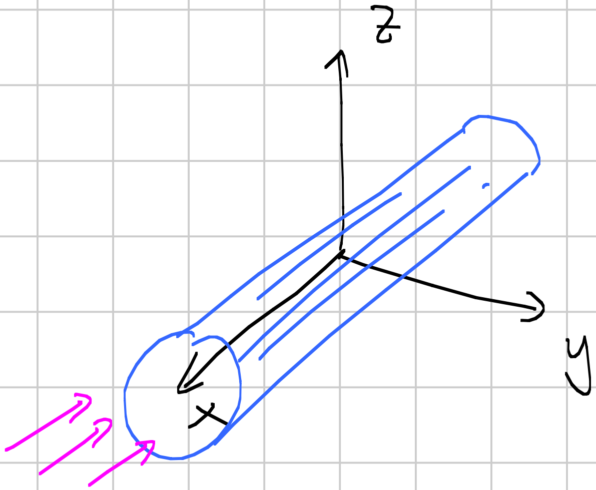
$A =$ intersezione di 2 cilindri infiniti perpendicolari

$=$ volta a crociera

$$\mathrm{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx\, dy\, dz$$

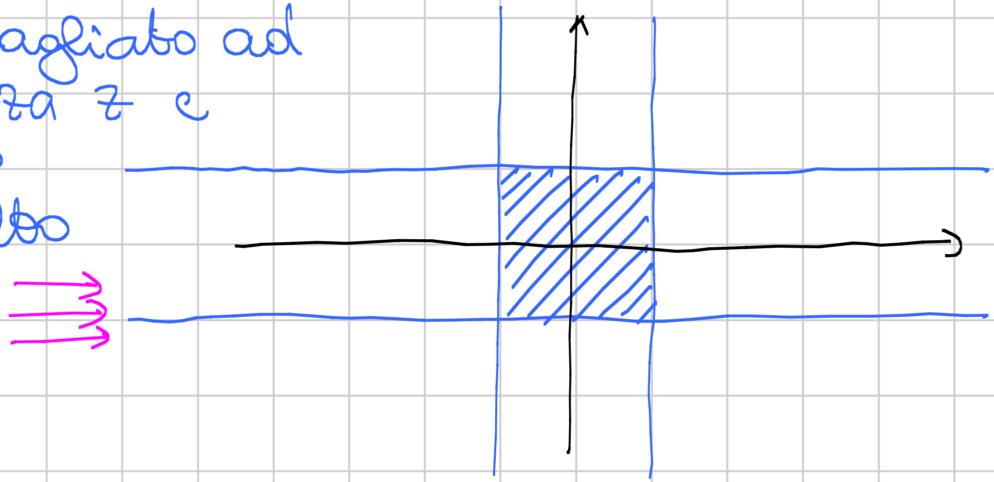
(sezioni) $$= \int_{-1}^{1} dz \iint_{S_z} 1 \, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \mathrm{Area}(S_z)\, dz$$

Come è fatta la sezione S_z ?



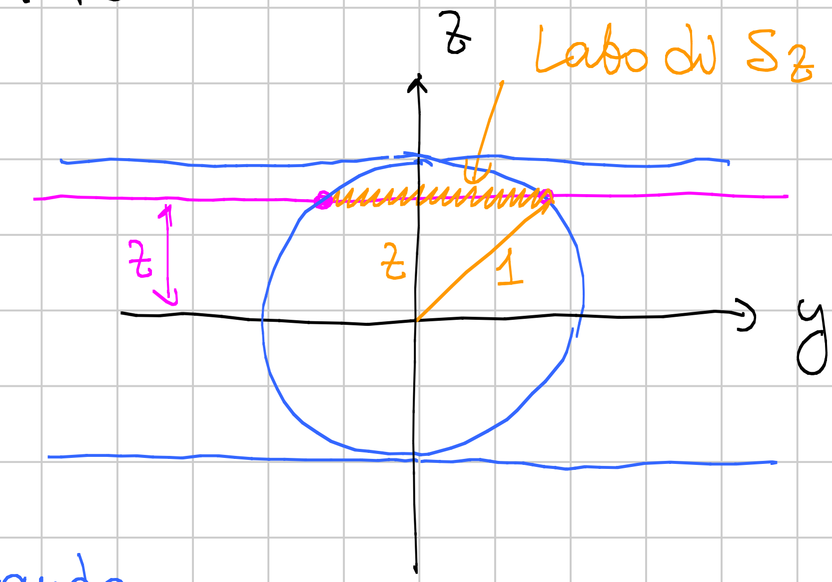
Tagliando con un piano ad altezza $z \in [-1, 1]$ ottengo su ogni cilindro una striscia infinita

Ho tagliato ad altezza z e guardo dall'alto



Quanto vale, in funzione di z, il lato del quadrato ?

Per rispondere guardiamo "di lato"



$\Rightarrow$ Lato $S_z = 2\sqrt{1-z^2}$

$$\text{Vol} = \int_{-1}^{1} \text{Area}(S_z)\, dz$$

integranda pari

$$= 4\int_{-1}^{1} (1-z^2)\, dz = 8\int_{0}^{1} (1-z^2)\, dz$$

$$= 8\left[z - \frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=1} = 8\cdot\frac{2}{3} = \boxed{\frac{16}{3}}$$

Cosa accade intersecando con il "terzo cilindro" $x^2+y^2 \le 1$?

MAT I TLC LAST (BUT NOT LEAST ???) $\boxed{\text{ORA 100}}$

$$f(x) = x - \underbrace{\int_0^x e^{-t^2}\,dt}_{}$$

primitiva di e^{-t^2} → No forma esplicita in termini di funzioni elementari

$f(x) = 2006$ Quante soluz. ?

Studio la funzione $f(x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$x - \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

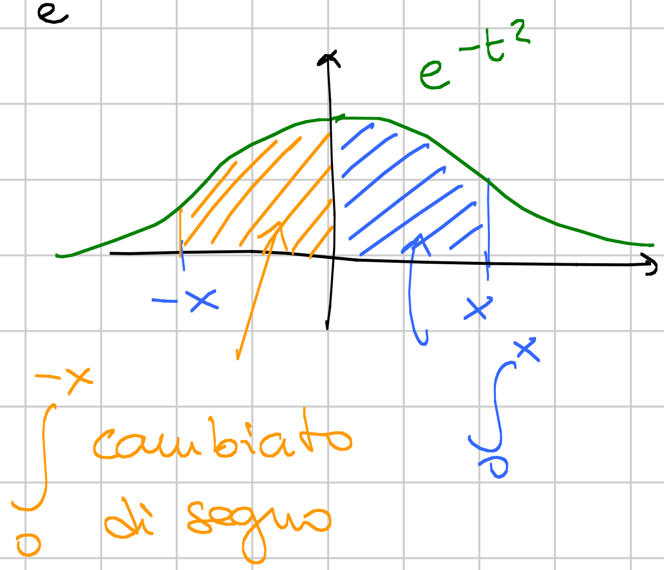
$x \downarrow +\infty$

$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \downarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ = Numero perché l'int. im pr. converge

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

$f(x)$ è dispari, perché x è dispari e

$$\int_0^{-x} e^{-t^2}dt = -\int_0^{x} e^{-t^2}dt$$



Dai limiti per $x \to \pm\infty$ possiamo dedurre che l'eq. ha ALMENO una soluz.

Per sapere se è unica studiamo la monotonia di $f(x)$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2} \geq 0 \text{ sempre e } = 0 \iff x = 0$$

Monotonia 3 $\Rightarrow$ f strett. crescente $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ al + una soluzione.

Conclusione : f è iniettiva e surgettiva

dai limiti

$\Rightarrow$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'eq.

$f(x) = \lambda$ ha esattamente una soluzione.

(2) Calcolare $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ $\left[\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \text{Hôpital}\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 - e^{-x^2}\right) = 1$$

(3) Studiare $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$

[Già sappiamo che $f(n) \longrightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{f(n)} \to 0$

$\Rightarrow$ cond. nec. ok $\Rightarrow$ la serie può convergere]

Perché $f(n) > 0$ per $n \geq 1$?

Perché $f(0) = 0$ e f è strett. cresc.

La serie diverge per C.A. con $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{f(n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{f(n)} = 1$$

limite del punto 2

④ Studiare $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\boxed{\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx}}_{a_n}$

$a_n \geq 0$ sempre perché $f(x) \geq 0$ sui positivi

Confronto asintotico con $b_n = \frac{1}{n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)\,dt}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x} f(t)\,dt}{x^2}$$

cambio variabili $x = \frac{1}{n}$

$[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}]$ $= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{2x}$ $[\frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hôp}]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f'(0) = 0$ [caso limite]

$[\frac{a_n}{b_n} \to 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \leq 1$ defin. $\Rightarrow a_n \leq b_n$ defin.

$\sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ conv. $\Rightarrow \sum a_n$ converge $]$

Domanda semi-Hard: per quali α converge $\sum (a_n)^\alpha$

— o — o —

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_0 = 2006 \end{cases}$$

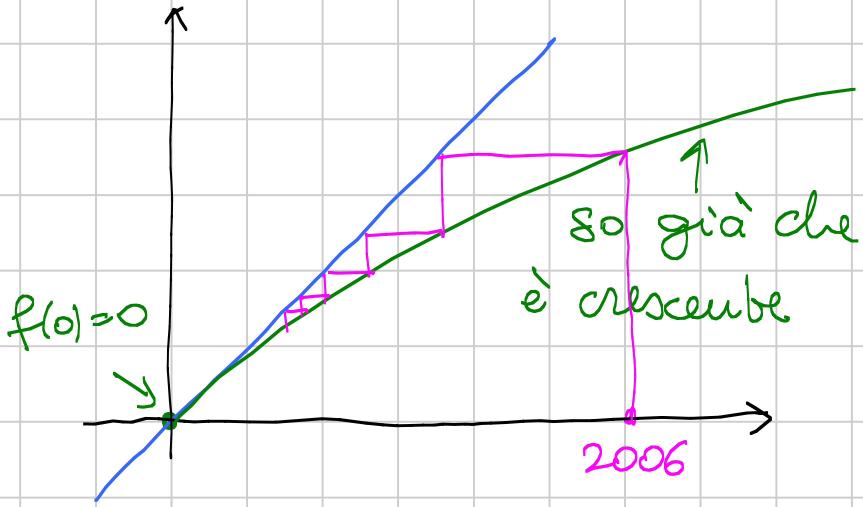
È autonoma!!!

Devo risolvere

$f(x) = x$, $f(x) \le x$

$f(x) \overset{?}{\le} x$ diventa

$$\cancel{x} - \int_0^x e^{-t^2}\,dt \overset{?}{\le} \cancel{x}$$



$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt \overset{?}{\ge} 0$$

vero se $x \ge 0$ (perché l'integranda è > 0)

falso se $x < 0$ (perché gli estremi sono nell'ordine sbagliato)

Conclusione: $f(x) \le x$ per ogni $x \ge 0$ con uguaglianza $\iff x = 0$

Idea: $a_n \to 0$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ← INDUZIONE

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ← SOLITO (i) + (ii) + teo. astratto

(iv) $\ell = 0$

(iv) si riduce all'eq. $f(\ell) = \ell$ che già sappiamo avere $\ell = 0$ come unica soluz.

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ è come dire $f(a_n) \leq a_n$ ⇒ si riduce alla diseq. $f(x) \leq x$, che sappiamo essere vera $\forall x \geq 0$

Se, data a_n definita per ricorrenza, vogliamo studiare la serie

$$\sum a_n$$

possiamo usare il criterio del rapporto:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(a_n)}{a_n} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Cambio variabili $x = a_n$

FATTO PRIMA

$\boxed{\text{LAST}}$ Primi termini di Taylor di $f(x)$ con centro in $x=0$?

$$f(x) = x - \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2} = 1 - \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + o(x^7)\right)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^7)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + \frac{x^7}{42} + o(x^8)$$

$f(x)$ per $x \sim 0$