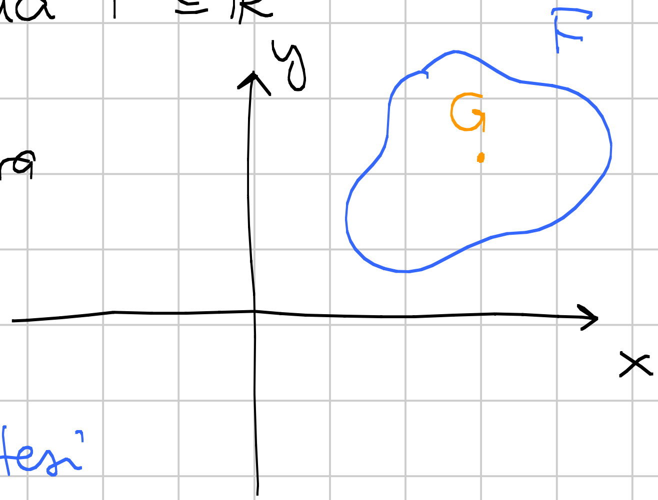
MAT I TLC

(-5) ORA 96

Titolo nota 19/12/2006

Baricentri, solidi di rotazione, Teo. Guldino 1, geo. analitica nello spazio.

BARICENTRI $n=2$ Data una figura piana $F \subseteq \mathbb{R}^2$



Matematicamente il baricentro della figura F è il punto G di coordinate $G = (x_G, y_G)$

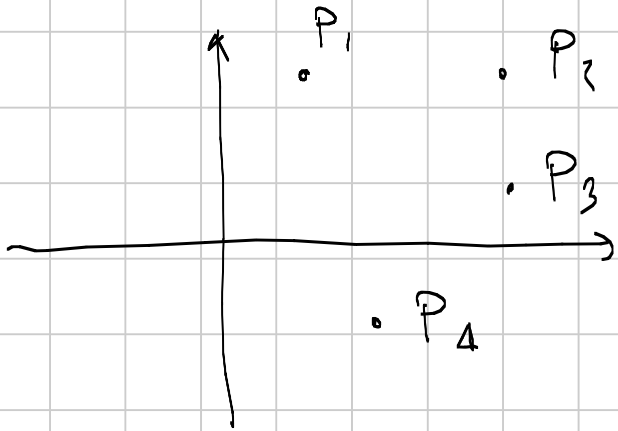
$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx\,dy$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx\,dy$$

Nelle ipotesi che la figura F sia fatta di un materiale omogeneo

Piccola interpretazione "fisica". Siano dati n punti $P_1, \dots, P_n$ tutti con la stessa massa.

Il baricentro del sistema $P_1, \dots, P_n$ è il punto G di coordinate (x_G, y_G)



$P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$

$$x_G = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \qquad y_G = \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$$

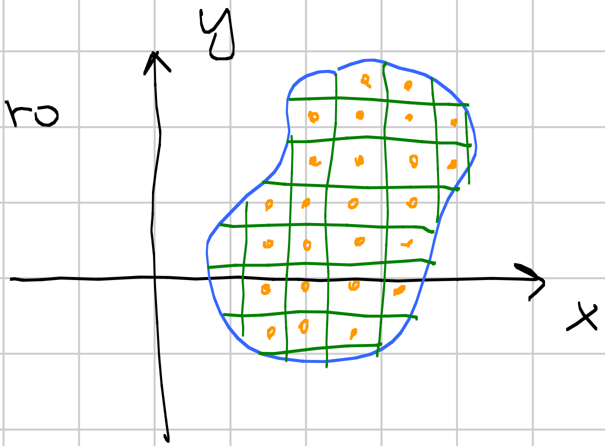
Se i punti avessero masse $m_1, \dots, m_n$ (anche diverse fra di loro), allora

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{\boxed{m_1 + \dots + m_n}} \qquad y_G = \frac{m_1 y_1 + \dots + m_n y_n}{m_1 + \dots + m_n}$$

massa totale degli n punti

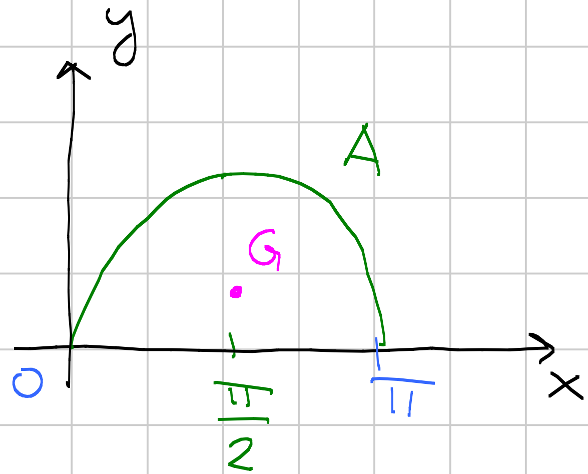
Se invece di avere n punti abbiamo una figura piana F, possiamo pensare di suddividerla in tanti "quadrettini", trattare

ogni ☐ come fosse un punto (il suo centro) e calcolare il baricentro dei punti così ottenuti.
Al limite (lato dei ☐ $\to 0$) il baricentro ottenuto tende agli integrali indicati prima.



Esempio 1

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x \}$$



$$\text{Area}(A) = 2 \qquad x_G = \frac{\pi}{2}$$ (per ragioni di simmetria)

$$\iint_A y \, dx\,dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} y\,dy =$$

normale asse x

$$= \int_0^{\pi} dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\sin x} = \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx}_{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left[\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \text{ per simmetria e sommati danno} \right.$$

$$\left. \int_0^{\pi} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx = \int_0^{\pi} 1 \, dx = \pi \right]$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \cdot \iint_A y \, dx \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$$

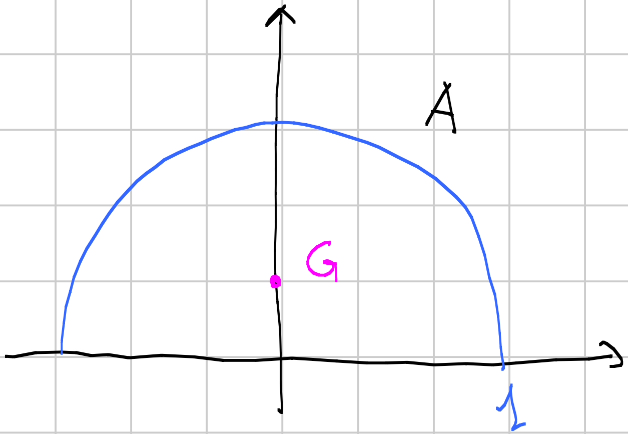
— o — o —

<u>Esempio 2</u> Semicirconferenza (posso supporre centro in $(0,0)$ e raggio $= 1$)

$x_G = 0$ (per simmetria)

coord. polari

$$\iint_A y \, dx dy \overset{\Downarrow}{=} \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \, \overbrace{\rho \sin\theta}^{y} \, \overbrace{\rho}^{J}$$



$$= \int_0^1 \rho^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta}_{2} = 2\int_0^1 \rho^2 \, d\rho = 2\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{2}{3}$$

$$y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx \, dy = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

— o — o —

Baricentro di un solido $V \subseteq \mathbb{R}^3$. Punto $G = (x_G, y_G, z_G)$ di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V x \, dx \, dy \, dz$$

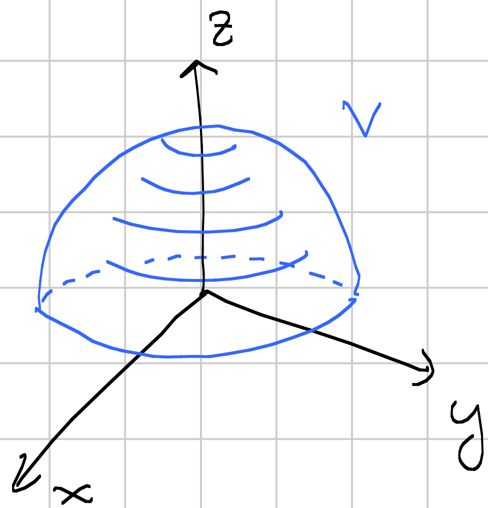
$$y_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V y \, dx \, dy \, dz$$

$$z_G = \frac{1}{\text{Vol}(V)} \iiint_V z \, dx \, dy \, dz$$

Sempre nell'ipotesi in cui il solido è costruito con un materiale omogeneo

Motivazione fisica analoga alla dim $= 2$.

Esempio 1 Semisfera (suppongo centro in $(0,0,0)$ e raggio 1)



Intanto $x_G = y_G = 0$ (per simmetria)
cioè G sta sull'asse z.

$$\mathrm{Vol}(V) = \frac{4}{3}\pi \underset{r=1}{r^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\iiint_V z \, dx\,dy\,dz \underset{\text{coord. sferiche}}{=} \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \, \underbrace{\rho \sin\varphi}_{z} \, \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{J}$$

$$= \int_0^1 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi = 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cos\varphi \, d\varphi$$

$\sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)$

$$= \pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{2} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi \int_0^1 \rho^3 \left[\underset{\uparrow \atop \varphi = \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right] d\rho = \pi \int_0^1 \rho^3 \, d\rho = \frac{\pi}{4}$$

Conclusione: $z_G = \dfrac{1}{\mathrm{Vol}(V)} \iiint_V z \, dx\,dy\,dz = \dfrac{3}{2\cancel{\pi}} \cdot \dfrac{\cancel{\pi}}{4} = \dfrac{3}{8}$

Più basso o più alto rispetto al semicerchio?

$$\frac{3}{8} \overset{?}{<} \frac{4}{3\pi} \qquad \underset{\underset{28,\ldots}{\shortparallel}}{9\pi} \overset{?}{<} 32$$

PIÙ BASSO !!!

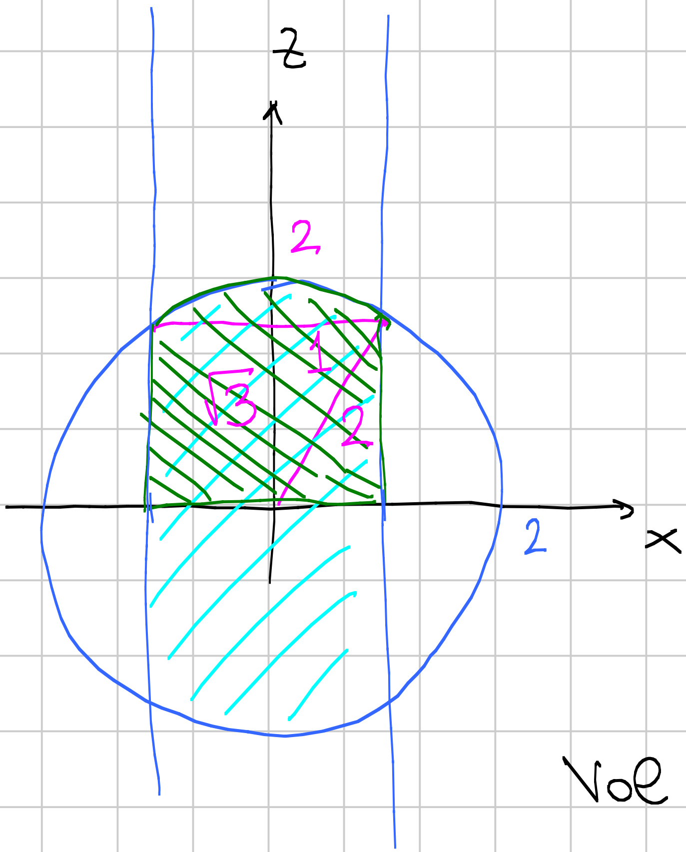
Esempio 2 PANETTONE

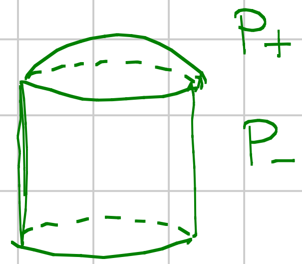
parte alta

$$P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \leq 1,\ z \geq 0\}$$

sfera con centro in (0,0,0) e raggio 2

cilindro infinito con asse lungo asse z e "base" il cerchio nel piano con centro in (0,0) e raggio 1





$$\mathrm{Vol}(P_-) = \text{Area base} \cdot \text{altezza}$$
$$= \pi \cdot \sqrt{3} = \pi\sqrt{3}$$

$$\mathrm{Vol}(P^+) = \iiint_{P^+} 1 \, dx\,dy\,dz \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sezioni}}}{=} \int_{\sqrt{3}}^{2} dz \iint_{S_z} 1 \, dx\,dy =$$

$$= \int_{\sqrt{3}}^{2} dz \cdot \mathrm{area}(S_z) =$$

$S_z =$ cerchio di raggio $\sqrt{4-z^2}$

$$= \pi \int_{\sqrt{3}}^{2} (4-z^2)\,dz$$

$$= \pi \left[4z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=\sqrt{3}}^{z=2} = \text{conto} \ldots$$

— o — o —

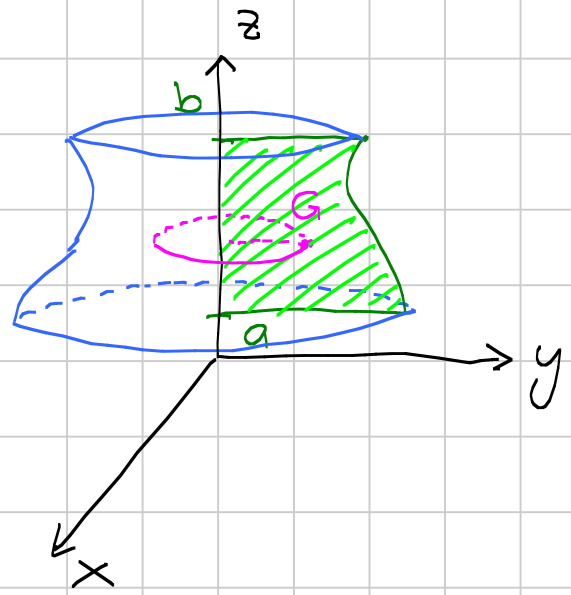
$$\iiint_{P^+} z \, dx\,dy\,dz = \int_{\sqrt{3}}^{2} dz \iint_{S_z} z \, dx\,dy = \int_{\sqrt{3}}^{2} z \, \mathrm{area}(S_z)\,dz =$$

$$= \pi \int_{\sqrt{3}}^{2} z(4-z^2)\,dz.$$

Ancora + semplice su P^-.

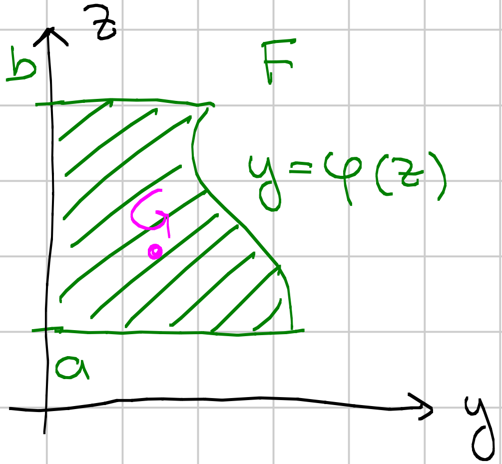
Solidi di rotazione e guldino

Solido di rotazione



Fissiamo le notazioni

Figura F che ruota



$$F = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : z \in [a,b],\ 0 \le y \le \varphi(z) \}$$

$\boxed{\text{TEO. GULDINO 1}}$ Sia V il solido ottenuto ruotando F intorno all'asse z. Sia G il baricentro della figura F. $G = (y_G, z_G)$. Allora

$$\boxed{\mathrm{Vol}(V) = \boxed{\mathrm{Area}(F)} \cdot \boxed{2\pi y_G}}$$

y_G = distanza di G dall'asse di rotazione

Area figura che ruota

lunghezza della circonferenza descritta da G durante la rotazione.

Def. baricentro di figura piana

$$y_G = \frac{1}{\mathrm{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz = \frac{1}{\mathrm{Area}(F)} \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} dy \cdot y$$

insieme normale asse z

$$= \frac{1}{\mathrm{Area}(F)} \int_a^b dz \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)} = \frac{1}{2\,\mathrm{Area}(F)} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

$$\mathrm{Vol}(V) = \iiint_V 1\,dx\,dy\,dz \overset{\text{sezioni}}{=} \int_a^b dz \iint_{S_z} 1\,dx\,dy =$$

$$= \int_a^b \mathrm{area}(S_z)\,dz$$

S_z = cerchio di raggio $\varphi(z)$

$$= \int_a^b \pi\,\varphi^2(z)\,dz$$

$\Rightarrow \mathrm{Area}(S_z) = \pi\,\varphi^2(z)$

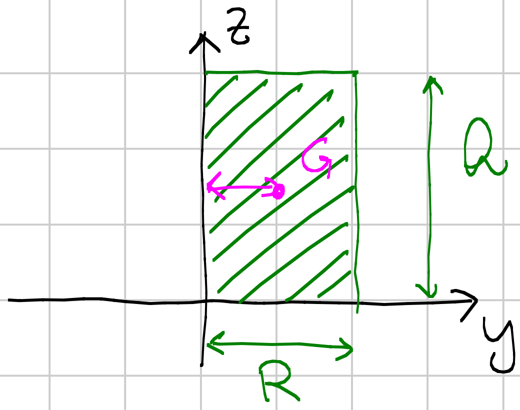
Allora in Guldino il termine di sinistra è

$\pi \int_a^b \varphi^2(z)\,dz$. Il termine di destra è

$$\mathrm{Area}(F)\cdot 2\pi\, y_G = \cancel{\mathrm{Area}(F)}\cdot \cancel{2}\pi\, \frac{1}{\cancel{2}\,\cancel{\mathrm{Area}(F)}} \int_a^b \varphi^2(z)\,dz$$

Quindi sono uguali !!!

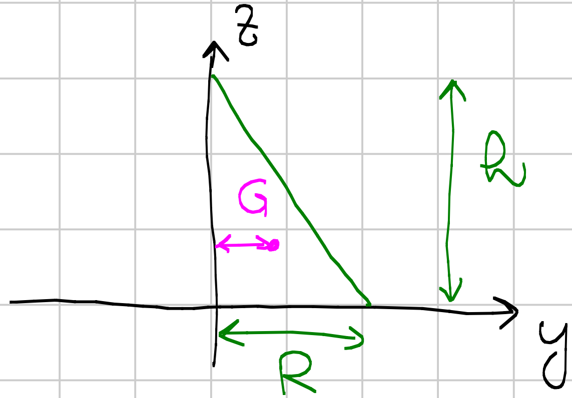
Esempio 1 Cilindro



$$\text{Volume} = \text{Area}(F) \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= R \cdot h \cdot \cancel{2}\pi \frac{R}{\cancel{2}} = \pi R^2 h$$

Esempio 2 Cono



$$\text{Volume} = \text{Area}(F) \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= \frac{R\,h}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\pi \; \frac{R}{3}$$

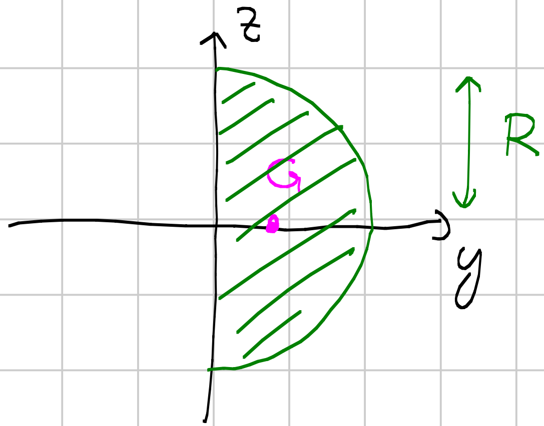
VEDI

Se i vertici di un Δ hanno coord. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), allora

$$G = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$= \pi R^2 \frac{h}{3}$$

Esempio 3 Sfera



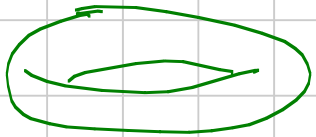
$$\text{Vol} = \text{Area}(F) \cdot 2\pi\, y_G$$

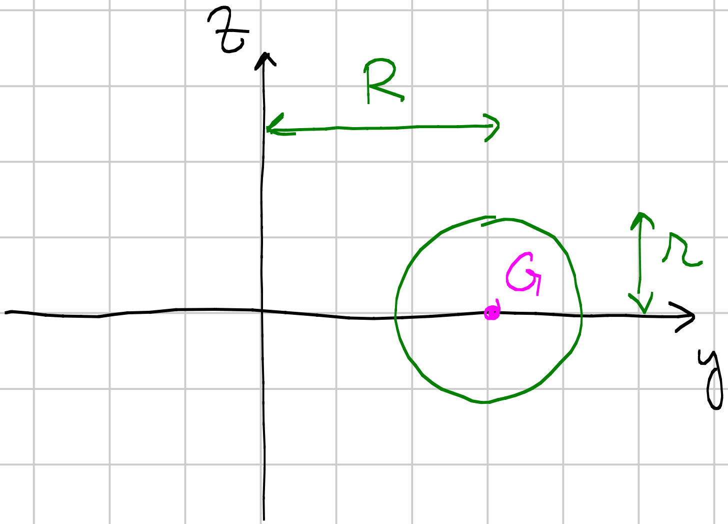
$$= \cancel{\tfrac{1}{2}}\,\pi R^2 \cdot \cancel{2\pi}\ \boxed{\frac{4}{3\cancel{\pi}} R}$$

calcolo fatto preced.

$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

Esempio 4 Toro





$$\text{Vol}(V) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi\, y_G$$

$$= \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 r^2 R$$

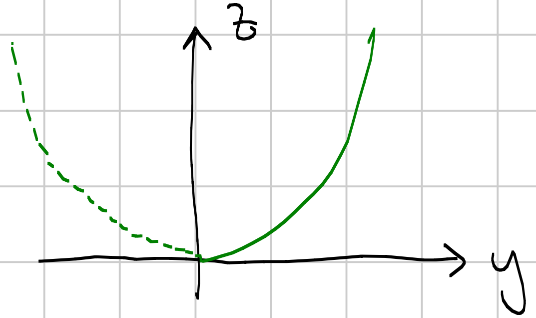
Riconoscere le figure di rotazione.

Qual è l'eq. di un solido di rotazione. Nelle ipotesi fatte prima si ha che

$$V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ z \in [a,b],\ \underbrace{x^2+y^2 \leq \varphi^2(z)}_{\text{la sezione è un cerchio di raggio } \varphi(z)} \}$$

Se invece di $\leq$ c'è solo $=$, vuol dire che sto considerando solo la superficie laterale del solido di rotazione.

Esempio 1 $z = x^2+y^2$ ← solido di rotazione con $\varphi(z) = \sqrt{z}$



$y = \varphi(z)$ diventa $y = \sqrt{z}$, cioè $z = y^2$

$z = x^2 + y^2 =$ paraboloide di rotazione.

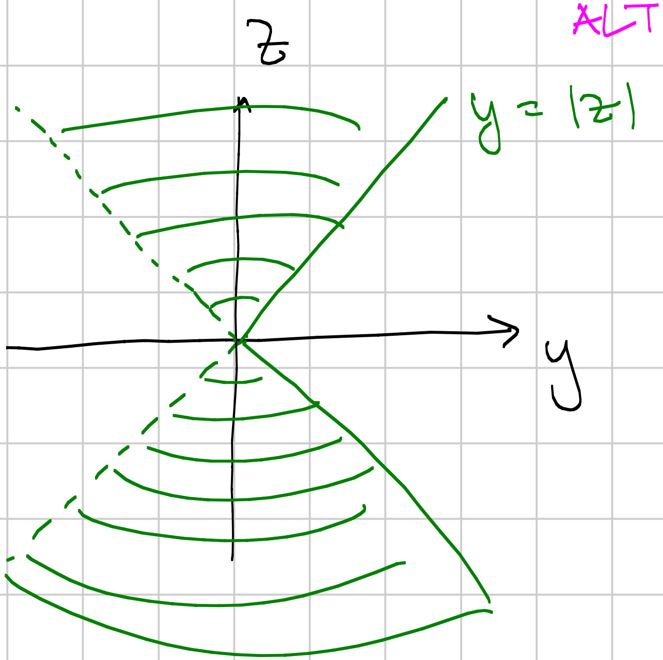
Doppio cono

Esempio 2 $\boxed{z = \sqrt{x^2+y^2}}$

SOLO PARTE ALTA

Si può scrivere come $\boxed{x^2+y^2 = z^2}$

solido di rotaz. con $\varphi(z) = |z|$



$y = |z|$

Se scrivo $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ho che z deve essere $z \geq 0$, quindi solo la parte sopra

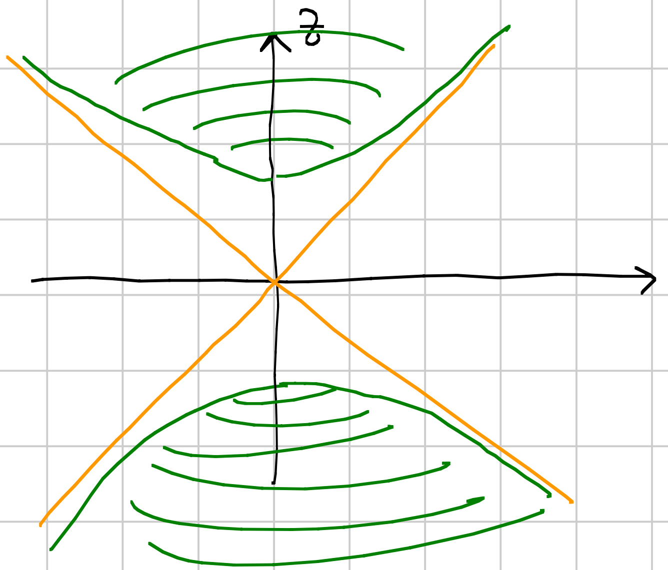
Esempio 3 $x^2 + y^2 = z^2 - 1$

Solido di rotazione con

$\varphi(z) = \sqrt{z^2 - 1}$

Disegnare $y = \varphi(z)$ $\quad y = \sqrt{z^2 - 1}$ $\rightsquigarrow$ $y^2 = z^2 - 1$

$z^2 - y^2 = 1$



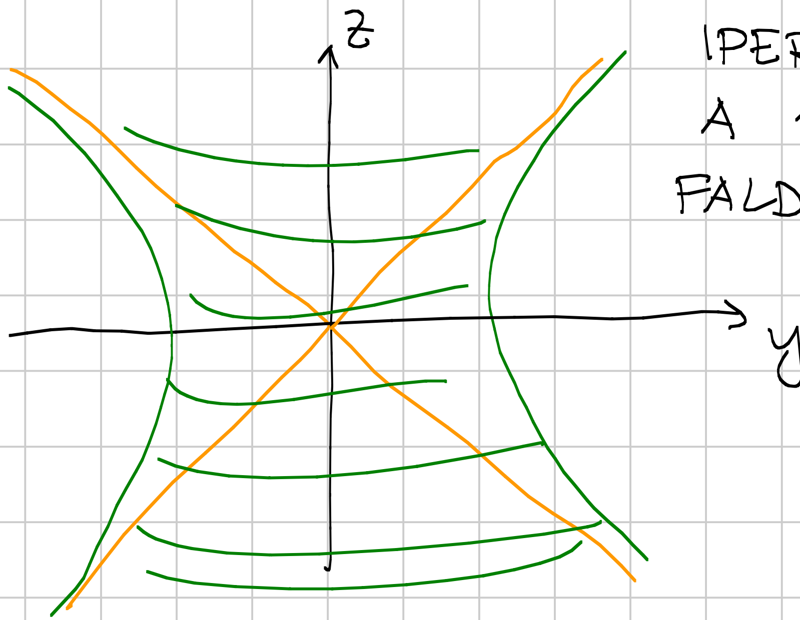
iperboloide a 2 FALDE

Esempio 4 $\quad x^2 + y^2 = z^2 + 1$

$\varphi(z) = \sqrt{z^2+1}$

$y = \varphi(z) \rightsquigarrow y = \sqrt{z^2+1}$

$\rightsquigarrow y^2 = z^2 + 1 \rightsquigarrow y^2 - z^2 = 1$



IPERB. A 1 FALDA