EQ. DIFF. LINEARI DEL 1° ORDINE ← 2ª ISOLA

$$\boxed{u' + a(t)\,u = b(t)}$$

1° METODO: FATTORE INTEGRANTE

Sia $A(t)$ una primitiva di $a(t)$: $A'(t) = a(t)$

Molt. l'eq. a destra e sinistra per $\boxed{e^{A(t)}}$ ← fattore integrante

$$u' e^{A(t)} + a(t)\, e^{A(t)}\, u = b(t)\, e^{A(t)}$$

$$\underbrace{\left(u\, e^{A(t)}\right)'}_{u' e^{A(t)} + u \left(e^{A(t)}\right)'} = b(t)\, e^{A(t)}$$

Posso ricavare

$$u e^{A(t)} = \int b(t) e^{A(t)} dt + c$$

parametro che ci aspettiamo

Ora basta ricavare u

$$\boxed{u(t) = e^{-A(t)} \left\{ c + \int b(t) e^{A(t)} dt \right\}}$$

FORMULA PER SOLUZ. GENERALE

Operativamente: si trova esplicitamente la soluzione a patto di

* saper fare la primitiva di $a(t)$
* " " " di $b(t) e^{A(t)}$.

— o — o —

$\boxed{\text{2° METODO}}$ Comportarsi come per le altre eq. lineari:

↗ soluzione generale eq. omogenea

↘ + soluzione QUALUNQUE della non omog.

L'eq. omog. diventa

$$u' + a(t)\,u = 0$$ → lin. + omog., ma NO coeff. costanti

→ in realtà è a var. sep. e quindi la posso risolvere

$$u' = -a(t)\,u$$

1. Separare $\dfrac{du}{dt} = -a(t)\,u \Rightarrow \dfrac{du}{u} = -a(t)\,dt$

2. Integrare $\displaystyle\int \frac{du}{u} = -\int a(t)\,dt$

$$\log|u| = -A(t) + c$$

3. Ricavare $|u(t)| = e^{-A(t)+c} = e^{-A(t)} \cdot e^{c} = k e^{-A(t)}$

$$u(t) = \pm k e^{-A(t)} \qquad \boxed{u(t) = k e^{-A(t)}}$$ SOL. GEN. OMOG.

Mi serve ora una soluz. qualunque della non omog. e la posso cercare con il metodo di variazione delle costanti.
La cerco quindi del tipo

$$u(t) = k(t)\, e^{-A(t)}$$

$$u'(t) = k'(t)\, e^{-A(t)} - k(t)\, a(t)\, e^{-A(t)}$$

Sostituisco nell'eq.

$$\underbrace{k'(t)\, e^{-A(t)} - \cancel{k(t)\, a(t)\, e^{-A(t)}}}_{u'} \underbrace{+ \cancel{a(t)\, k(t)\, e^{-A(t)}}}_{+a(t)\,u} = \underbrace{b(t)}_{= b(t)}$$

$$k'(t)\, e^{-A(t)} = b(t) \Rightarrow k'(t) = b(t)\, e^{A(t)}$$

$$\Rightarrow k(t) = \int b(t)\, e^{A(t)}\, dt$$

Conclusione: stessa formula che con il fattore integrante

$$\boxed{u(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol. gen.} \\ \text{NON omog.}}}{}\; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sol. gen.} \\ \text{omog.}}}{k e^{-A(t)}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{soluz. part. eq. NON omog.} \\ \text{trovata con metodo variazione} \\ \text{costanti}}}{e^{-A(t)} \int b(t) e^{A(t)}\, dt}}$$

— o — o —

Esempio 1 $\quad u' = u + t \qquad \boxed{u' - u = t}$

$a(t) = -1 \qquad b(t) = t$

$A(t) = -t \Rightarrow$ Fattore integrante: $e^{A(t)} = e^{-t}$

Moltiplico per e^{-t}: $\quad \underbrace{u'e^{-t} - u e^{-t}}_{(u e^{-t})'} = t e^{-t}$

$$u e^{-t} = \int \underset{F}{t}\,\underset{g}{e^{-t}}\,dt + c = \underset{F}{t}\,\underset{G}{(-e^{-t})} - \int \underset{f}{1}\,\underset{G}{(-e^{-t})}\,dt + c$$

$$= -te^{-t} + \int e^{-t} + c = -te^{-t} - e^{-t} + c$$

Abbiamo ottenuto:

$$u(t)\,e^{-t} = -te^{-t} - e^{-t} + c$$ e quindi

$$\boxed{u(t) = -t - 1 + ce^{t}}$$ soluz. generale ottenuta con il fattore integrante.

In alternativa: $u' - u = t$ lineare a coeff. costanti

Omogenea $u' - u = 0$ $\rightsquigarrow$ Pol.: $x - 1 = 0$

$\rightsquigarrow$ Radici: $x = 1$ $\rightsquigarrow$ Base e^{t} $\rightsquigarrow$ Sol. gen. omog: $\boxed{u(t) = ce^{t}}$

Calcolo soluz. particolare con il tentativo $u(t) = at+b$

$u'(t) = a$ Sostituisco

$$a - at - b = t \qquad \begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \qquad a = b = -1$$
$$u' - u = t$$

Soluz. particolare: $u(t) = -t-1$

— o — o —

Esempio 2
$$\begin{cases} u' + \dfrac{u}{t} = \cos t \\ u(\pi) = \alpha \end{cases} \qquad a(t) = \frac{1}{t} \qquad b(t) = \cos t$$

FATTO GENER. PER EQUAZ. LINEARI

Interv. max. di esistenza della soluzione = interv. max. di esistenza dei coefficienti

$= (0, +\infty)$ = pezzo dell'insieme di def. di $\frac{1}{t}$ e cost che contiene π

$A(t) = \log t$ $\qquad\qquad e^{A(t)} = e^{\log t} = t$

so già che
$t>0$ dove soluz.
"vive"

Moltiplico tutto per t : $\qquad \underbrace{t u' + u}_{(tu)'} = t \cdot \cos(t)$

$$tu = \int \underset{F}{t} \cdot \underset{g}{\cos(t)}\, dt = t \cdot \sin(t) - \int \sin(t)\, dt$$

$$= t \cdot \sin(t) + \cos(t) + c$$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t)}{t} + \frac{c}{t}$$

Determiniamo c in funzione del parametro α

$u(\pi) = \alpha \qquad -\frac{1}{\pi} + \frac{c}{\pi} = \alpha \Rightarrow \frac{c}{\pi} = \alpha + \frac{1}{\pi} \Rightarrow c = \pi\alpha + 1$

Soluzione del problema di Cauchy è

$$\boxed{u(t) = \sin(t) + \frac{\cos(t)}{t} + \frac{\pi\alpha + 1}{t}}$$

Cosa succede ad $u(t)$ quando $t \to 0^+$? Riscrivo

$$u(t) = \underbrace{\sin(t)}_{\to 0} + \frac{\overbrace{\cos(t) + 1 + \pi\alpha}^{\to 2+\pi\alpha}}{\underbrace{t}_{\to 0^+}}$$

- se $2+\pi\alpha > 0$, abbiamo che $u(t) \to +\infty$
- se $2+\pi\alpha < 0$, " " $u(t) \to -\infty$

$\Big\}$ BLOW-UP

- se $2+\pi\alpha = 0$, che succede? Vuol dire che $\pi\alpha = -2$

$$u(t) = \sin(t) + \underbrace{\boxed{\frac{\cos(t) - 1}{t}}}_{\to 0} \to 0$$

Esempio 3 (Non è lineare!)

$$\begin{cases} u' = u \log u \\ u(0) = \alpha > 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ VAR. SEP.

$$\frac{du}{dt} = u \log u$$

$$\frac{du}{u \log u} = dt$$

$$\int \frac{du}{u \log u} = \int dt \qquad \log|\log u| = t + c$$

$$|\log u| = e^{t+c} = e^t \cdot e^c = c e^t$$

$$\Rightarrow \log u = \pm c e^t = c e^t \Rightarrow \boxed{u(t) = e^{ce^t}}$$

Determino c in funzione di α

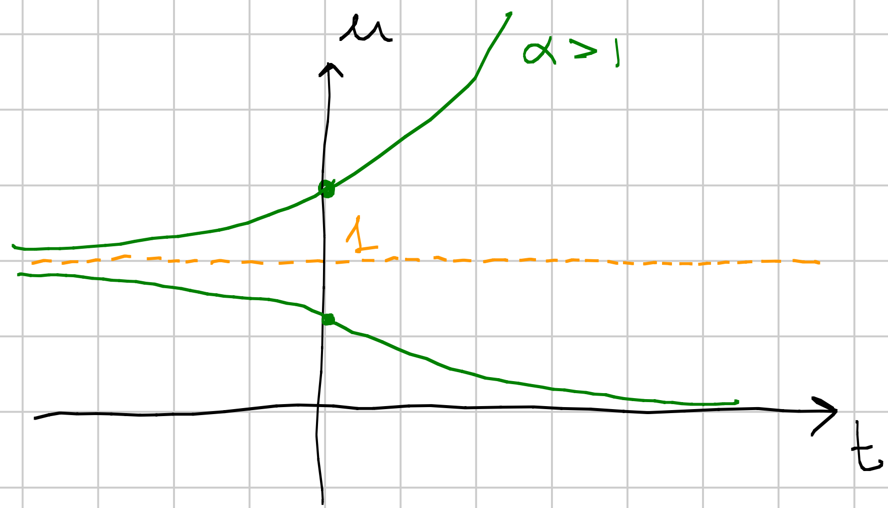
$$u(0) = \alpha \qquad e^{ce^0} = \alpha \qquad e^c = \alpha \Rightarrow c = \log \alpha$$

Soluz. del probl. di Cauchy

$$u(t) = e^{\log\alpha \cdot e^t}$$

- Se $\alpha > 1$, cioè $\log\alpha > 0$

- Se $\alpha \in (0,1)$, cioè $\log\alpha < 0$



<u>Osservazione generale</u>. Data un' eq. diff. AUTONOMA, se $u(t)$ è una soluzione, allora

Traslata dx / sx di $u(t)$ $\rightarrow$ $u(t+c)$ è ancora una soluzione per ogni valore di c.

[Verifica per eq. del 1° ORDINE: se l' eq. è $u' = g(u)$

$$u'(t) = g(u(t)) \quad \text{per ogni } t \in \ldots$$

ma allora se $v(t) = u(t+c)$

$$v'(t) = u'(t+c) = g(u(t+c)) = g(v(t))$$

$\Rightarrow$ v è una soluzione]

Esempio $\begin{cases} u' = e^u \\ u(0) = 1 \end{cases}$

$$\frac{du}{dt} = e^u \Rightarrow \frac{du}{e^u} = dt$$

$$\int \frac{du}{e^u} = \int dt = t+c$$

$$\int e^{-u}\,du = -e^{-u}$$

$$-e^{-u} = t+c \Rightarrow e^{-u} = -t+c \Rightarrow -u = \log(c-t)$$

$$\Rightarrow \boxed{u(t) = -\log(c-t)}$$ SOLUZ. GEN.

Determino c: $u(0) = 1$

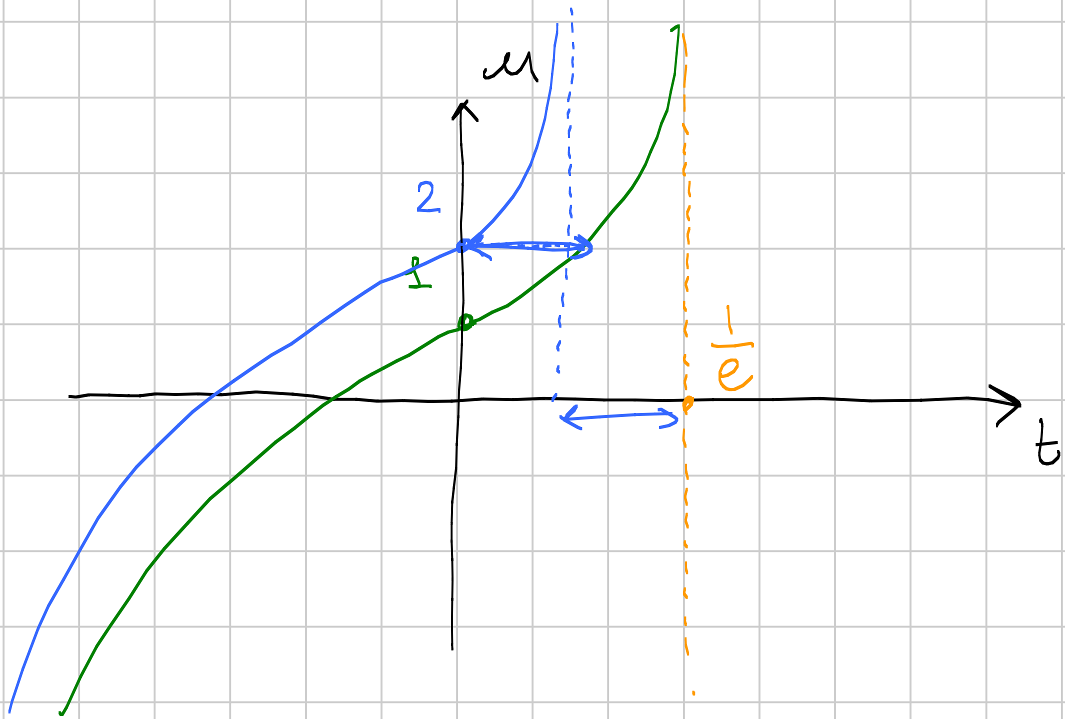
$$u(0) = -\log c \Rightarrow \log c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{e}$$

Soluz. problema di Cauchy: $\boxed{u(t) = -\log\left(\frac{1}{e} - t\right)}$

Interv. max. di esistenza : $\left(-\infty, \frac{1}{e}\right)$

Tempo di vita : $T = \frac{1}{e}$

Blow-up per $T = \frac{1}{e}$



Usando l'osserv. generale sappiamo che <u>tutte</u> le soluzioni hanno blow-up e inoltre più α è grande, più il tempo di vita è vicino a zero

Per ogni valore $T_0 > 0$ esiste esattamente una soluz. che sopravvive fino a esattamente T_0, dove ha blow-up.

Esempio 2 $\quad u'' + u = \sin(\alpha t)$

parametro

Domanda: le soluzioni di questa equazione sono funzioni limitate?

Come ci aspettiamo le soluz.? Eq. lineare.

Omogenea: $\quad u'' + u = 0 \rightsquigarrow x^2+1 = 0 \rightsquigarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$

Sol. gen. omog.: $\quad u(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$

Serve poi una soluz. particolare della NON OMOG. che cercheremo del tipo

$$u(t) = \lambda\cos(\alpha t) + \mu\sin(\alpha t)$$

In conclusione la soluz. gen. della non omog. sarà del tipo

$$u(t) = \underbrace{a\cos(t) + b\sin(t)}_{\text{dall' omog.}} + \lambda\cos(\alpha t) + \mu\sin(\alpha t)$$

Indipendentemente dai valori dei vari parametri si tratta di una funzione <u>limitata</u>.

$\boxed{\text{Questa analisi funziona per } \alpha \neq 1}$ Cosa succede per $\alpha = 1$?

$u'' + u' = \cos(t) \leftarrow$ soluz. dell' omog.

$\Rightarrow$ soluz. particolare non è del tipo $\lambda\sin(t) + \mu\cos(t)$, ma del tipo

$$\underbrace{\lambda t\sin(t) + \mu t\cos(t)}$$

oscilla come $\sin(t)$ e $\cos(t)$, ma l'ampiezza delle oscillazioni cresce con il tempo

Quindi per $\alpha \neq 1$, tutte le soluzioni sono limitate
per $\alpha = 1$, tutte le soluzioni sono illimitate