# Eq. diff. lineari

$$\boxed{a_n(t)\, u^{(n)} + a_{n-1}(t)\, u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\, u' + a_0(t)\, u = f(t)}$$

CASI
- OMOGENEO $f(t) \equiv 0$
- NON OMOGENEO $f(t) \not\equiv 0$

1ª osservazione

Detto brutalmente: la soluzione di un'eq. diff. lineare vive finchè può, cioè l'interv. max. di esistenza è il più grosso intervallo (o semiretta, o tutto $\mathbb{R}$) su cui i coeff. $a_0(t), \dots, a_n(t)$ e $f(t)$ sono definiti)

$\boxed{\text{CASO OMOGENEO}}$ L'insieme delle soluzioni di un'eq. diff. lineare omogenea di ordine $n$ è uno SPAZIO VETTORIALE di dim $= n$.

Operativamente: se conosco una base $u_1(t), \ldots, u_n(t)$ di tale spazio, ogni altra soluzione la posso scrivere nella forma

SOLUZ. GEN. EQ. OMOGENEA

$$\boxed{u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + \ldots + c_n u_n(t)}$$

Basta trovare una base e abbiamo trovato la soluz. generale.

Dim. per dim. che è uno sp. vettoriale devo verificare

1. che la somma di 2 soluz. è ancora una soluz.
2. che se moltiplico una soluz. per un numero ottengo ancora una soluz.

(1) Siano $u$ e $v$ 2 soluz. e sia $w = u+v$

$$a_n(t)\,u^{(n)} + a_{n-1}(t)\,u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,u' + a_0(t)\,u = 0$$ ← u sol.

$$a_n(t)\,v^{(n)} + a_{n-1}(t)\,v^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,v' + a_0(t)\,v = 0$$ ← v soluz.

Sommando ottengo

$$a_n(t)\,\underbrace{[u^{(n)}+v^{(n)}]}_{=w^{(n)}} + \dots + a_1(t)\,\underbrace{[u'+v']}_{=w'} + a_0(t)\,\underbrace{[u+v]}_{=w} = 0$$

w è soluz.

(2) Sia $u$ una soluz. e sia $\lambda$ un numero.
Moltiplico la prima eq. per $\lambda$

$$\lambda a_n(t)\,u^{(n)} + \dots + \lambda a_1(t)\,u' + \lambda a_0(t)\,u = 0$$

$$a_n(t)\,[\lambda u]^{(n)} + \dots + a_1(t)\,[\lambda u]' + a_0(t)\,[\lambda u] = 0$$ ↙ $\lambda u$ è una soluz.

③ Perchè ha dimensione $n$? "Brutalmente"

$$\begin{cases} \text{Eq.} \\ u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Eq.} \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = 1 \\ u''(0) = 0 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases}$$

$1^a$ soluz. $v_1(t)$ $\qquad$ $2^a$ soluz. $v_2(t)$

Procedendo nello stesso modo ottengo $n$ soluzioni diverse, che indico con $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$

Dico che $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$ è una base. Essere una base vuol dire 2 cose:

- essere lin. indip.
- ogni altra soluz. è comb. lineare degli elementi della base

Primo punto: supponiamo che $c_1 v_1(t) + c_2 v_2(t) + \dots + c_n v_n(t) = w$ sia la funzione nulla.

$w(0)$ deve fare $0$, ma $w(0) = c_1 \underbrace{v_1(0)}_{=1} + c_2 \underbrace{v_2(0)}_{=0} + \dots + c_n \underbrace{v_n(0)}_{=0} = c_1$

Analogamente $w'(0)$ deve fare $0$, ma

$$W'(0) = c_1 \underbrace{v_1'(0)}_{=0} + c_2 \underbrace{v_2'(0)}_{=1} + \dots + c_n \underbrace{v_n'(0)}_{=0} = c_2$$

Quindi tutti i coeff. devono essere nulli

Secondo punto: bisogna dimostrare che ogni altra soluzione è comb. lineare delle $v_i$

Sia $u$ una soluz. con
$$\begin{cases} \text{Eq.} \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(0) = u_{n-1} \end{cases}$$

Dico che $u(t) = u_0 v_1(t) + u_1 v_2(t) + \dots + u_{n-1} v_n(t)$

[Fare la verifica]

## COME DETERMINARE UNA BASE

Si "riesce" se i coeff. sono costanti.

### Caso particolare $n=2$

$$a u'' + b u' + c u = 0$$

Considero l'eq. polinomiale associata $a x^2 + b x + c = 0$

Considero le radici dell'eq.: ho 3 casi

- $\Delta > 0 \Rightarrow$ l'eq. ha 2 radici reali distinte $\lambda, \mu$.

  Una base è $e^{\lambda t}, \; e^{\mu t} \Rightarrow$ la soluz. gen. è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 e^{\mu t}}$$

- $\Delta = 0 \Rightarrow$ l'eq. ha una radice $\lambda$ di molteplicità 2.

  Una base è $e^{\lambda t}, \; t e^{\lambda t} \Rightarrow$ la soluz. gen. è

  questo non è multiplo di $e^{\lambda t}$ per una cost.

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}}$$

parte reale　　parte immag.

- $\Delta < 0 \Rightarrow$ l'eq. ha 2 radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$.

Una base è $\quad e^{\alpha t}\cos(\beta t), \qquad e^{\alpha t}\sin(\beta t)$

$\Rightarrow$ la soluz. generale è

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\alpha t}\cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t}\sin(\beta t)}$$

Nota bene: il caso $\Delta < 0$ è imparentato con il caso $\Delta > 0$ nel senso che verrebbe da dire che una base è

$$e^{(\alpha + i\beta)t} \qquad\qquad e^{(\alpha - i\beta)t}$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}\cdot e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right)$$

Dim della formula che dà le basi: basta verificare che i 2 elementi indicati sono soluzioni dell'equazione.

In realtà, uno potrebbe cercare una soluzione dell'eq.

$$a u'' + b u' + c u = 0$$

che sia della forma $u(t) = e^{\lambda t}$. Sostituisco

$u'(t) = \lambda e^{\lambda t}$, $u''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$, quindi deve essere

$$\underbrace{a \lambda^2 e^{\lambda t}}_{a u''} + \underbrace{b \lambda e^{\lambda t}}_{+\, b u'} + \underbrace{c e^{\lambda t}}_{+\, c u} = 0 \; ; \quad \underbrace{\cancel{e^{\lambda t}}}_{\neq 0} (a \lambda^2 + b \lambda + c) = 0$$

$\lambda$ deve essere una radice del polinomio

Nel caso generale di un'eq. di ordine $n$ il polinomio associato ha $n$ radici (contate con molteplicità)

- ogni radice reale $\lambda$ di molt. 1 produce 1 el. della base:

$$e^{\lambda t}$$

- ogni radice reale $\lambda$ di molt. $k$ produce $k$ el. della base:

$$e^{\lambda t}, \quad t e^{\lambda t}, \quad t^2 e^{\lambda t}, \ldots, \quad t^{k-1} e^{\lambda t}$$

- ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$ di molt. 1 produce 2 el. della base:

$$e^{\alpha t} \cos(\beta t) \qquad e^{\alpha t} \sin(\beta t)$$

- se la coppia $\alpha \pm i\beta$ ha molt. $k$, produce $2k$ el. della base: i 2 precedenti, e gli stessi moltiplicati per $t, t^2, \ldots, t^{k-1}$

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 92}}$ $(-9)$

Esempio 1 $\quad u'' + 4u' + 3u = 0 \longrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$

$(x+3)(x+1) = 0$

$\to$ Radici: $x = -3,\ x = -1 \longrightarrow$ Base: $e^{-3t},\ e^{-t}$

Sol. gen. $\quad \boxed{u(t) = a e^{-3t} + b e^{-t}}$

Esempio 2 $\quad u'' + 6u' + 9u = 0 \longrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0$

$(x+3)^2 = 0$

$\to$ Radici: $x = -3$ radice di molt. 2 $\longrightarrow$ Base: $e^{-3t},\ t e^{-3t}$

Sol. gen. $\quad \boxed{u(t) = a e^{-3t} + b t e^{-3t}}$

Esempio 3 $\quad u'' + 2u' + 5u = 0 \longrightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$

$\rightarrow$ Radici: $\quad x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \dfrac{-2 \pm 4i}{2}$

$= -1 \pm 2i \quad (\alpha = -1, \ \beta = 2)$

$\rightarrow$ Base: $\quad e^{-t}\cos(2t), \quad e^{-t}\sin(2t)$

Sol. gen. $\quad \boxed{u(t) = a e^{-t}\cos(2t) + b e^{-t}\sin(2t)}$

Esempio 4 $\quad u'' - 9u = 0 \rightarrow x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

Sol. gen.: $\quad u(t) = a e^{3t} + b e^{-3t}$

Esempio 5 $\quad u'' - 9u' = 0 \rightarrow x^2 - 9x = 0 \quad x(x-9) = 0$

$\rightarrow$ Radici: $x = 0, \ x = 9 \rightarrow$ Base: $e^{9t}, \ e^{0t} = 1$

Sol. gen.: $\quad \boxed{u(t) = a e^{9t} + b}$

<u>Esempio 6</u> $u'' + 9u = 0 \longrightarrow x^2 + 9 = 0 \qquad x^2 = -9$

Radici: $x = \pm 3i$ (compl. coniugate con $\alpha = 0$, $\beta = 3$)

$\to$ Base: $e^{0t}\cos(3t) \qquad e^{0t}\sin(3t)$

Sol. gen.: $\boxed{u(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t)}$

— o — o — o —

## EQUAZIONI NON OMOGENEE

**Teorema** La soluzione generale di un' eq. diff. lineare NON omogenea (anche a coeff. non costanti) è

$$u(t) = \underbrace{c_1 u_1(t) + \dots + c_n u_n(t)}_{\text{soluz. gen. dell' eq. omogenea}} + \underbrace{\bar{u}(t)}_{\text{soluzione QUALUNQUE dell' eq. non omog.}}$$

Operativamente: se trovo una soluzione QUALUNQUE dell'eq. non omogenea le ho trovate tutte.

Su cosa si basa la dim. del teo.? Su 2 fatti:

(1) Se $u$ e $v$ sono 2 soluz. della NON OMOGENEA, allora $w = u - v$ è una soluz. dell'eq. OMOGENEA

(2) Se $u$ è una soluz. della NON OMOGENEA e $w$ è una soluz. dell'OMOGENEA, allora $u+w$ è sol. della NON OMOGENEA.

—o—o—

Operativamente: servono dei metodi per trovare almeno una soluz. della non omogenea.

→ PROVARE A INDOVINARE

→ METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

<u>Esempio 1</u> $u'' + 4u' + 3u = e^t$ Cerco una soluz. del tipo $u(t) = \lambda e^t$

$u'(t) = \lambda e^t$ $u''(t) = \lambda e^t$ sostituisco

$$\underbrace{\lambda e^t}_{u''} + \underbrace{4\lambda e^t}_{4u'} + \underbrace{3\lambda e^t}_{3u} = e^t \qquad 8\lambda e^t = e^t \Rightarrow \lambda = \frac{1}{8}$$

Soluz. generale: $u(t) = \underbrace{\frac{1}{8}e^t}_{\text{soluz. appena trovata}} + \underbrace{a e^{-t} + b e^{-3t}}_{\text{soluz. generale eq. omogenea } u''+4u'+3u=0}$

<u>Esempio 2</u> $u'' + 4u' + 3u = e^{2t}$ Provo con $u(t) = \lambda e^{2t}$

$u'(t) = 2\lambda e^{2t}$ $u''(t) = 4\lambda e^{2t}$

$$\underbrace{4\lambda e^{2t}}_{u''} + \underbrace{8\lambda e^{2t}}_{4u'} + \underbrace{3\lambda e^{2t}}_{3u} = e^{2t} \qquad 15\lambda e^{2t} = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{15} \Rightarrow \text{Sol. gen.} \quad u(t) = \frac{1}{15} e^{2t} + a e^{-t} + b e^{-3t}$$

Esempio 3 $\quad u'' + 4u' + 3u = e^{-3t}$ $\quad$ Provo con $u(t) = \lambda e^{-3t}$

$$u'(t) = -3\lambda e^{-3t} \qquad u''(t) = 9\lambda e^{-3t}$$

$$\underbrace{9\lambda e^{-3t}}_{u''} \underbrace{-12\lambda e^{-3t}}_{+4u'} + \underbrace{3\lambda e^{-3t}}_{+3u} = e^{-3t} \qquad 0 = e^{-3t} \quad !!!!$$

BRAVO FURBO!!!! $e^{-3t}$ è soluzione dell'eq. omogenea, quindi sostituita a sinistra produce 0!!!

Secondo tentativo: $u(t) = \lambda t e^{-3t}$

$$u'(t) = \lambda e^{-3t} - 3\lambda t e^{-3t}, \qquad u''(t) = -3\lambda e^{-3t} - 3\lambda e^{-3t} + 9\lambda t e^{-3t}$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-6\lambda e^{-3t} + \cancel{9\lambda t e^{-3t}}}_{u''} \underbrace{+4\lambda e^{-3t} - \cancel{12\lambda t e^{-3t}}}_{+4u'} \underbrace{+\cancel{3\lambda t e^{-3t}}}_{+3u} = e^{-3t}$$

$$-2\lambda e^{-3t} = e^{-3t} \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Sol. gen.: $\boxed{u(t) = -\frac{1}{2} t e^{-3t} + a e^{-t} + b e^{-3t}}$

2° membro di tipo $e^{\alpha t}$: provare con $u(t) = \lambda e^{\alpha t}$.
Se non funziona, aggiungere delle $t$ davanti finché basta.

— o — o —

<u>Esempio 4</u> $\quad u'' + 4u' + 3u = \cos(2t)$

Provo con $\quad u(t) = \lambda \cos(2t) + \mu \sin(2t)$

$$u'(t) = -2\lambda \sin(2t) + 2\mu \cos(2t)$$

$$u''(t) = -4\lambda\cos(2t) - 4\mu\sin(2t)$$

Sostituisco:

$$\underbrace{-4\lambda\cos(\,) - 4\mu\sin(\,)}_{u''}\ \underbrace{-8\lambda\sin(\,) + 8\mu\cos(\,)}_{+4u'}\ \underbrace{+3\lambda\cos(\,) + 3\mu\sin(\,)}_{+3u}$$

$$= \cos(\,)$$

$$\begin{cases} -4\lambda + 8\mu + 3\lambda = 1 & \leftarrow \text{coeff. } \cos(\,) \\ -4\mu - 8\lambda + 3\mu = 0 & \leftarrow \text{coeff. } \sin(\,) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\lambda + 8\mu = 1 \\ -8\lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

$\downarrow$

Risolvo $\rightarrow$ trovo $\lambda$ e $\mu$

In generale: se 2° membro contiene sin e/o cos,
provare con una comb. lineare degli stessi.
Se non funziona, t davanti finché basta.

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 93}}$ (-8)

Esempio 5 $\quad u'' + 4u' + 3u = t^2 + 1$ ← polinomiale

Provo con $u(t) = at^2 + bt + c$ ← polinomio di II grado completo (a, b, c sono da trovare)

$u'(t) = 2at + b \qquad u''(t) = 2a$

$$\underbrace{2a}_{u''} + \underbrace{8at + 4b}_{4u'} + \underbrace{3at^2 + 3bt + 3c}_{+3u} = t^2 + 1$$

$$\begin{cases} 3a = 1 & \text{coeff. di } t^2 \\ 8a + 3b = 0 & \text{coeff. di } t \\ 2a + 4b + 3c = 1 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$a = 1/3$

$3b = -8a = -\frac{8}{3} \Rightarrow b = -\frac{8}{9}$

3ª eq ⇝ ricavo c

In generale, se il 2° membro è un polinomio di grado k, provo con un polinomio di grado k a coeff. incogniti

Esempio 6 $\quad u''' + u' = t^2$

Consideriamo prima l'omogenea $\quad u''' + u' = 0$

$\rightarrow x^3 + x = 0; \quad x(x^2+1) = 0 \rightarrow$ Radici: $\quad x = 0 \quad x^2 = -1$

$x = 0 \quad x = \pm i$

$(\alpha = 0, \beta = 1)$

$\rightarrow$ Base: $e^{0t} = 1, \quad e^{0t} \cos t, \quad e^{0t} \cdot \sin t$

$1, \quad \cos t, \quad \sin t$

Cerco una soluz. qualunque dell'eq. non omogenea. Verrebbe da cercarla della forma

$u(t) = at^2 + bt + c \qquad$ Questo non funziona.

Allora si mette una "t davanti"

$$u(t) = at^3 + bt^2 + ct$$

$$u'(t) = 3at^2 + 2bt + c \,, \quad u''(t) = 6at + 2b \,, \quad u'''(t) = 6a$$

$$\underbrace{6a}_{u'''} + \underbrace{3at^2 + 2bt + c}_{+\ u'} = t^2$$

$$\begin{cases} 3a = 1 & \text{coeff. } t^2 \\ 2b = 0 & \text{coeff. } t \\ 6a + c = 0 & \text{termine noto} \end{cases}$$

$a = \frac{1}{3} \quad b = 0 \quad c = -6a = -2$

Soluz. particolare dell'eq. non omog. è

$$u(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t$$

Sol. gen.: $u(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t + a + b\cos t + c \sin t$

3 parametri liberi

# METODO DI VARIAZIONE DELLE COSTANTI

$$u'' + 4u' + 3u = e^{t}$$

Sol. gen. dell'omogenea: $u(t) = a e^{-t} + b e^{-3t}$

Cerco una soluzione della non omogenea del tipo

$$\boxed{u(t) = a(t) e^{-t} + b(t) e^{-3t}}$$

$a(t)$ e $b(t)$ sono funzioni da determinare

$$u'(t) = \boxed{a'(t) e^{-t}} - a(t) e^{-t} + \boxed{b'(t) e^{-3t}} - 3b(t) e^{-3t}$$

Impongo che la somma dei 2 termini con $a'$ e $b'$ faccia 0

$$\boxed{a'(t) e^{-t} + b'(t) e^{-3t} = 0}$$

1ª equazione

$u''(t) = -a'(t)e^{-t} + a(t)e^{-t} - 3b'(t)e^{-3t} + 9b(t)e^{-3t}$

Sostituisco $u''$, $u'$ e $u$ nell'equazione

$$
\begin{array}{lllll}
u'' & -a'e^{-t} + \cancel{ae^{-t}} & - 3b'e^{-3t} & + \cancel{9be^{-3t}} & \\
+4u' & -\cancel{4ae^{-t}} & -\cancel{12be^{-3t}} & & \\
+3u & +\cancel{3ae^{-t}} & +\cancel{3be^{-3t}} & & = e^{t}
\end{array}
$$

DEVE SUCCEDERE che i termini con la a e quelli con la b se ne vanno. Resta un'eq. in $a'$ e $b'$

$$\boxed{-a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} = e^{t}}$$

$2^a$ equazione

La prima e $2^a$ eq. costituiscono un sistema nelle incognite $a'$ e $b'$

$$\begin{cases} a'(t)e^{-t} + b'(t)e^{-3t} = 0 \\ -a'e^{-t} - 3b'e^{-3t} = e^{t} \end{cases}$$

Sommo: $-2b'e^{-3t} = e^{t}$

$\Rightarrow \boxed{b' = -\frac{1}{2}e^{4t}}$

Sostituisco nella 1ª: $a'e^{-t} \underbrace{-\frac{1}{2}e^{4t}}_{b'} \cdot e^{-3t} = 0$

$$a'e^{-t} = \frac{1}{2}e^{t} \Rightarrow \boxed{a' = \frac{1}{2}e^{2t}}$$

Trovati $a'(t)$ e $b'(t)$ posso ricavare $a(t)$ e $b(t)$ facendo la primitiva (se si riesce!!!)

$$a(t) = \frac{1}{4}e^{2t} \qquad b(t) = -\frac{1}{8}e^{4t}$$

e finalmente

$$u(t) = a(t)e^{-t} + b(t)e^{-3t} = \frac{1}{4}e^{2t} \cdot e^{-t} - \frac{1}{8}e^{4t} \cdot e^{-3t}$$

$$= \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{8}e^t = \frac{1}{8}e^t$$

= stesso risultato che con il tentativo $u(t) = \lambda e^t$ !!!!!

—o—o—

$$u'' + 4u' + 3u = \cos(3t) + t^2 + e^{5t}$$

Tentativo misto:

$$u(t) = a\cos(3t) + b\sin(3t) + ct^2 + dt + e + fe^{5t}$$

oppure: si risolve separatamente con un solo pezzo per volta e poi si sommano le soluzioni così ottenute.

Perchè funziona? LINEARITÀ (verifica per esercizio!!!)