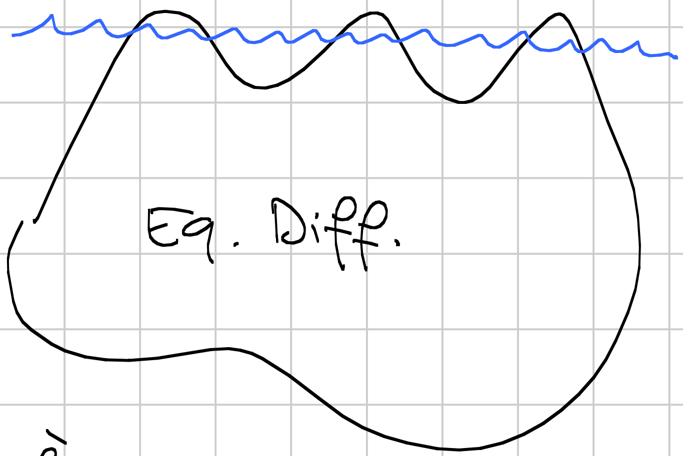
MAT I TLC

ORA 88

Titolo nota 13/12/2006

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

3 ISOLETTE



Eq. diff. = equazione in cui l'incognita è una funzione

↗ Eq. Diff. $\boxed{\text{ORDINARIE}}$: l'incognita è una funzione di <u>una</u> variabile: $y(x)$, $y(t)$, $\boxed{u(t)}$

La funzione incognita $u(t)$ deve soddisfare una certa relazione che lega t, $u(t)$ e un po' di derivate della funzione u

<u>Esempio</u> $u'(t) + 3u(t) = t^2 + 1$

Risolvere l'eq. vuol dire trovare una funzione $u(t)$ che soddisfa la relazione per ogni $t \in$ insieme di defin. di u.

→ Eq. Diff. alle derivate parziali : u dipende da più variabili

(ad esempio $u(t,x,y)$) e la relazione coinvolge u e un po' delle sue derivate parziali

Esempio $u_t = u_{xx} + u_{yy}$

Noi vedremo solo eq. diff. ordinarie.

$\boxed{\text{ORDINE DI UN'EQ. DIFF.}}$ È il massimo ordine di derivazione che compare nell'equazione

Esempio $u''(t) + 3u'(t) + [u(t)]^2 = \sin t$ → ORDINE 2

$u'' + 3u' + u^2 = \sin t$ ← NOTAZIONE RAPIDA

$[u'(t)]^2 + 2t\,u(t) = 0$ → ORDINE 1

$(u')^2 + 2t\,u = 0$ ← NOTAZIONE RAPIDA

Un'eq. diff. di ordine n si presenta nella forma

$$\Phi\left(t, u, u', u'', \dots, u^{(n)}\right) = 0$$

funzione enorme che lega t, u e tutte le derivate di u fino alla n-esima.

Un'eq. diff. si dice $\boxed{\text{AUTONOMA}}$ se la t compare solo come argomento della u e delle sue derivate.

$u'(t) = 3u(t) + \boxed{t^2}$ ← NON AUTON. $\quad u' = 3u + t^2$

$u'(t) = 3u^2(t) + 5$ ← AUTONOMA $\quad u' = 3u^2 + 5$

Oss. Autonoma $\Leftrightarrow$ in notazione rapida non compare la t.

Un' eq. diff. si dice $\boxed{\text{IN FORMA NORMALE}}$ se la derivata di ordine max è ricavata rispetto al resto.

<u>Esempi</u> $u'' = 5u' + 7t$ ← SI FORMA NORMALE

$(u'')^3 + 5u' - 10t^2 = 0$ ← NI FORMA NORMALE: non è in forma normale, ma si può portare ricavando u''

$u'' = \sqrt[3]{10t^2 - 5u'}$ ← PORTATA in FORMA NORMALE

$(u'')^2 + 5u' - 10t^2 = 0$ ← NO forma normale e non ci si può fare nulla

$(u'')^2 = 10t^2 - 5u'$ ← Non si può decidere univoc. il segno

In generale un' eq. diff. di ordine n in forma normale si presenta nella forma

$$\boxed{u^{(n)} = F\left(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}\right)}$$

non c'è se è AUTONOMA

— o — o —

Un'eq. diff. del **1° ORDINE** in forma normale si dice a **VARIABILI SEPARABILI** se il 2° membro è il prodotto di una funzione della sola t per una funzione della sola u. Si presenta quindi nella forma

$$\boxed{u' = f(t) \cdot g(u)}$$

→ 1ª ISOLA

Esempio 1 $\quad u' = u \cdot \sin t \quad$ VAR. SEP. con $f(t) = \sin t$ e $g(u) = u$

Es. 2 $\quad u' + tu = t \quad$ si può riscrivere come

$$u' = t - tu = t(1-u)$$

VAR. SEP. con $f(t) = t$ e $g(u) = 1-u$

Es. 3 $\quad u' = u^4 \quad$ VAR. SEP. con $g(u) = u^4$ e $f(t) \equiv 1$

Oss. Ogni equazione del 1° ordine in forma normale AUTONOMA è a variabili separabili

$$u' = g(u) \cdot \underbrace{1}_{f(t)}$$

Un' eq. diff. di ORDINE qualunque si dice $\boxed{\text{LINEARE}}$ se la u e le sue derivate compaiono "di primo grado", cioè se è della forma

$$\boxed{a_n(t)\,u^{(n)} + a_{n-1}(t)\,u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)\,u' + a_0(t)\,u = f(t)}$$

Le funzioni $a_n(t), a_{n-1}(t), \dots, a_1(t), a_0(t)$ si dicono COEFFICIENTI dell' eq.

<u>Esempio 1</u>

$\boxed{u''} + \boxed{u'} + t^2 \boxed{u} = 0$ SI LINEARE

$u'' + u' + \cos t \cdot u = 0$ SI LINEARE

$u'' + u' + t \cdot \boxed{\cos u} = 0$ NO LINEARE

$u'' + u' + \boxed{\cos(t \cdot u)} = 0$ NO LINEARE

Un' eq. diff. del 1° ORDINE in forma NORMALE e LINEARE si può sempre portare nella forma

$$\boxed{u' + a(t)\, u = b(t)}$$

2ª ISOLA

Si dice che un' eq. diff. lineare è a COEFF. COSTANTI se i coefficienti $a_0, a_1, \ldots, a_n$ non dipendono da t e sono quindi numeri.

Si presenta nella forma

$$\boxed{a_n u^{(n)} + a_{n-1} u^{(n-1)} + \ldots + a_1 u' + a_0 u = f(t)}$$

3ª ISOLA

Un' eq. diff. lineare si dice OMOGENEA se $f(t) = 0$, altrimenti si dice non omogenea.

Domanda: lineare a coeff. cost. + autonoma $\Rightarrow$ omogenea ?

NO

Esempio $u'' + 3u' + 5u = \boxed{7}$ $f(t)$

coeff. cost. lineare, 2° ordine non omogenea

Esempio $u' = t(1+u)$

1° ORDINE A VAR. SEP.

$$\Downarrow$$

$u' - tu = t$

LINEARE 1° ORDINE

Esempio $u' = 7u$

Var. sep.

$u' - 7u = 0$

lineare a coeff. costanti omogenea autonoma

Esempio 1 $\quad u' = u \quad$ Una soluzione è $u(t) = e^t$

$u(t) = e^t + c$ per $c \neq 0$ NON è una soluzione

$$u'(t) = e^t \neq u(t).$$

Un'altra soluzione è $u(t) = 2e^t$. Verifica

$$u'(t) = 2e^t = u(t)$$

In generale $u(t) = ce^t$ è una soluzione per ogni $c \in \mathbb{R}$.
Le soluzioni sono infinite. Si potrebbe dimostrare che non ce ne sono altre.

Esempio 2 $\quad u'' = -u \quad$ Una soluz. è $u(t) = \sin t$
Un'altra soluz. è $u(t) = \cos t$

In generale $u(t) = a \sin t + b \cos t$ è una soluzione per ogni valore dei parametri $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$.

$u'(t) = a \cos t - b \sin t$, $u''(t) = -a \sin t - b \cos t = -u(t)$

Si potrebbe dimostrare che non ce ne sono altre

<u>Esempio 3</u> $u' = -u^2$ Una soluz. è $u(t) = \frac{1}{t}$

Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{t^2} = -[u(t)]^2$

$u(t) = \frac{c}{t}$ è soluzione ?

$$u'(t) = -\frac{c}{t^2} \overset{?}{=} -u^2(t) = -\frac{c^2}{t^2}$$

sono uguali $\Leftrightarrow$ $c^2 = c$ $\Leftrightarrow$ $c = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Per ogni valore del parametro $c \in \mathbb{R}$ si ha che $u(t) = \frac{1}{t+c}$

è soluzione (e non ce ne sono altre)

Verifica: $u'(t) = -\frac{1}{(t+c)^2} = -u^2(t).$

$\boxed{\text{In generale}}$ un'eq. diff. ha infinite soluzioni dipendenti da un numero di parametri uguale all'ordine dell'eq.

$\boxed{\text{PROBLEMA + CAUCHY}}$ $\longrightarrow$ Equazione differenziale + CONDIZIONI INIZIALI DI CAUCHY

Per un'eq. di ordine n le condizioni iniziali di Cauchy prevedono di assegnare il valore di u e di tutte le sue derivate fino alla $(n-1)$-esima in uno stesso punto t_0, detto istante iniziale. (In tutto sono n condizioni)

Esempi

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2+1 \\ u(\boxed{7}) = 5 \\ u'(\boxed{3}) = 2 \end{cases}$$

NO: ho assegnato u e u' per valori diversi di t.

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2+1 \\ u(7) = 5 \\ u''(7) = 5 \end{cases}$$

NO: dovevo assegnare u e u'

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2+1 \\ u(7) = 0 \\ u(5) = 0 \end{cases}$$

NO: dovevo assegnare u e u'

$$\begin{cases} u'' + 3u' = t^2+1 \\ u(7) = 5 \\ u'(7) = 6 \end{cases}$$

OK. $(t_0 = 7)$

In generale il problema di CAUCHY per un'eq. diff. in forma normale di ordine n si presenta nella forma

$$\begin{cases} u^{(n)} = F(t, u, u', \dots, u^{(n-1)}) & \leftarrow \text{Eq. Diff.} \\ u(t_0) = u_0 \\ u'(t_0) = u_1 \\ \vdots \\ u^{(n-1)}(t_0) = u_{n-1} \end{cases}$$

n condiz. INIZIALI

$t_0, u_0, u_1, \dots, u_{n-1}$ sono DATI

TEO. ESISTENZA E UNICITÀ

Consideriamo un problema di Cauchy con l'eq. in forma normale

Allora

* se F è continua il problema ha almeno 1 soluzione (e talvolta anche + di una); ← ESISTENZA

* se F è un po' meglio (ad esempio differenziabile) allora la soluzione è unica. ← UNICITÀ

Operativamente: la soluzione di un' eq. diff. di ordine n dipende da n parametri.
Le n condizioni iniziali nei casi decenti permettono di determinare univocamente il valore dei parametri.

EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

$$\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = 5 \end{cases}$$

1. SEPARARE
2. INTEGRARE
3. RICAVARE

Trovare la soluz. gen. dell'eq. con il parametro c (FIN QUI si USA SOLO l'eq.)

4. DETERMINARE C
5. CONTROLLARE
6. STUDIARE

si USA COND. INIZIALE

1. $\boxed{\text{SEPARARE}}$ $u' = t^3 u^2$ $\quad \dfrac{du}{dt} = t^3 u^2$

[Tutte le t a destra tutte le u a sinistra]

$$\frac{du}{u^2} = t^3 dt$$

2. $\boxed{\text{INTEGRARE}}$ a sinistra rispetto a u, a destra rispetto a t

$$\int \frac{du}{u^2} = \int t^3 dt \; ; \quad -\frac{1}{u} = \frac{t^4}{4} + c$$

parametro

3. $\boxed{\text{RICAVARE}}$ (u in funzione di t)

$$-\frac{1}{u} = \frac{t^4}{4} + C = \frac{t^4+4C}{4} \implies u = -\frac{4}{t^4+4C}$$

La soluzione generale è

$$\boxed{u(t) = -\frac{4}{t^4+C}}$$

C o 4C, sempre una costante è

Si riesce sempre a trovare la soluz. generale a patto di
* saper fare le primitive
* saper ricavare.

4. $\boxed{\text{DETERMINARE C}}$ (usando la condizione iniziale)

$$u(0) = 5 \implies -\frac{4}{C} = 5 \implies C = -\frac{4}{5}$$

ho messo t=0 nella sol. gen.

La soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 - \frac{4}{5}} = -\frac{20}{5t^4 - 4}$$

$$\boxed{u(t) = \frac{20}{4 - 5t^4}}$$

5. CONTROLLARE (che quella ottenuta al punto 4 sia la soluzione del problema)

Verifico cond. iniz. $u(0) = \frac{20}{4} = 5.$

Der. denom.

Verifico l'eq.: $u'(t) = 20 \left(-\frac{1}{(4-5t^4)^2} \right) (-20t^3)$

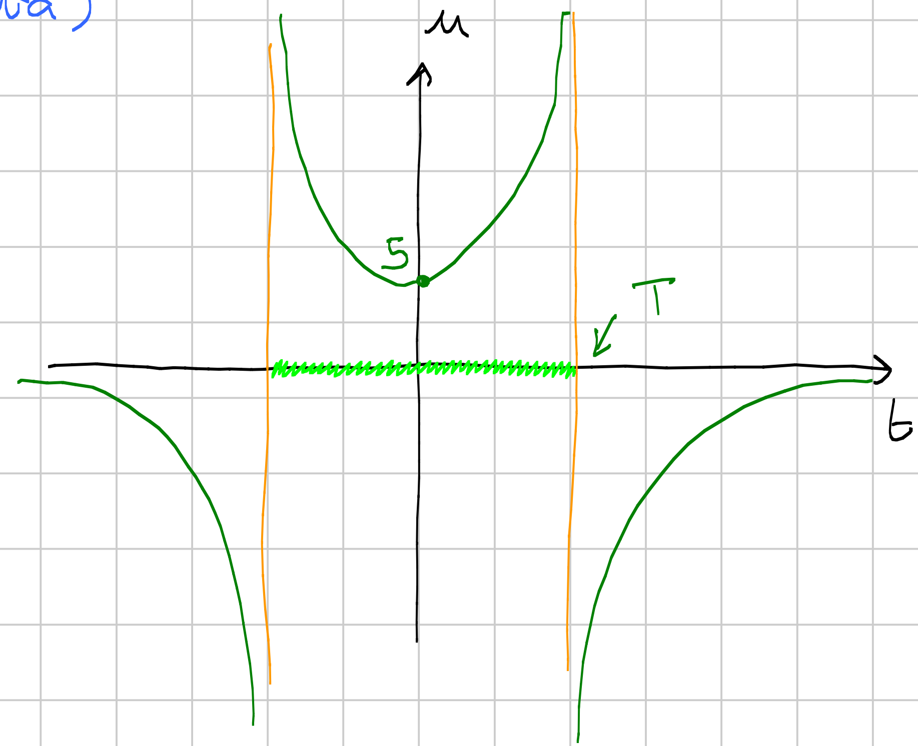
$$= \frac{20^2}{(4-5t^4)^2} \cdot t^3 = t^3 \cdot u^2(t) \quad . \text{ OK}$$

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 30}}$

6. $\boxed{\text{STUDIARE}}$ (la soluzione ottenuta)

$$u(t) = \frac{20}{4-5t^4}$$



Problemi quando $4-5t^4=0$

$5t^4=4$ $\qquad t=\pm\sqrt[4]{\frac{4}{5}}$

INTERVALLO MASSIMALE DI ESISTENZA

Il pezzo dell'insieme di definizione di $u(t)$ che contiene l'istante iniziale

Nell'esempio l'insieme di def. ha 3 pezzi e quello che ci interessa (int. max. di esistenza) è quello centrale, cioè

$$\left(-\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\,,\ +\sqrt[4]{\frac{4}{5}}\right)$$

$\boxed{\text{TEMPO DI VITA}}$ della soluzione (LIFE SPAN) che è il sup dell'int. max. di esistenza.

Nell'esempio $T = \sqrt[4]{\frac{4}{5}}$.

In generale ci sono 3 possibilità

$\boxed{1.}$ $T = +\infty$ (cioè non ci sono problemi per t successivi a t_0)
Si dice che la soluzione ha ESISTENZA GLOBALE nel futuro.

$\boxed{2}$ $T < +\infty$. Si dice che la soluzione MUORE al tempo T.

$\boxed{2.1}$ Si dice che si ha BLOW-UP al tempo T se

$$\lim_{t \to T^-} u(t) = \pm\infty$$ (come nell'esempio)

$\boxed{2.2}$ Si dice che si ha BREAK-DOWN al tempo T se <u>non</u> si ha blow-up, ma

$$\lim_{t \to T^-} u'(t) = \pm \infty$$

(Volendo: BREAK-DOWN = blow-up della derivata)

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\begin{cases} u' = t^3 u^2 \\ u(0) = 0 \end{cases}$

Fasi 1, 2, 3 come prima e portano alla soluz. gen.

$$u(t) = -\frac{4}{t^4 + C}$$

4. $\boxed{\text{DET. C}}$ Impongo $u(0) = 0$

$$\underset{\shortparallel}{u(0)} = \underset{\shortparallel}{0}$$

$$-\frac{4}{C} = 0$$

$\rightsquigarrow$ Non riesco a trovare C.

$\boxed{\text{N.B.}}$ Per il teo. di esistenza e unicità la soluzione DEVE esistere ed essere unica

In questo caso la soluzione è la funzione costante $u(t) \equiv 0$, come si verifica banalmente.

Più in generale, quando abbiamo il pb. di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t) \cdot g(u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

Se $g(u_0) = 0$, allora la soluzione è la funzione costante $u(t) \equiv u_0$.

Perchè funziona il metodo 1, 2, 3.

$u'(t) = u^2(t) \cdot t^3$. Dividio per $u^2(t)$:

$\dfrac{u'(t)}{u^2(t)} = t^3$. Integro tra 0 e T rispetto a t

istante iniziale

$$\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)}\,dt = \int_0^T t^3\,dt$$

A destra ottengo $\int_0^T t^3\,dt = \frac{T^4}{4}$

A sinistra: $\int_0^T \frac{u'(t)}{u^2(t)}\,dt =$

Pongo $y = u(t)$

$\Rightarrow dy = u'(t)\,dt$

Quando $t=0$ ho che $y = u(0) = u_0$ (condiz. iniziale)

$$= \int_{u_0}^{u(T)} \frac{dy}{y^2} = \left[-\frac{1}{y}\right]_{y=u_0}^{y=u(T)}$$

Quando $t = T$ ho che $y = u(T)$

$$= -\frac{1}{u(T)} + \frac{1}{u_0}$$

Poichè gli integrali a dx e sx devono essere uguali, avremo

$$-\frac{1}{u(T)}+\frac{1}{u_0}=\frac{T^4}{4}$$, da cui si può ricavare $u(T)$ in funzione di T.

Un po' brutale è aver diviso per $u^2(t)$.

* Se $u(0)\neq 0$, allora $u(t)\neq 0$ per t piccoli, quindi ha senso dividere, almeno per valori piccoli di t.
* Se $u(0)=0$, allora di sicuro non si può dividere (e per questo motivo in questo caso non si trova la soluz.!)

— o — o —

<u>Esempio 3</u>

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{t^2}{u} \\ u(0)=4 \end{cases}$$

① SEPARARE:

$$\frac{du}{dt}=-\frac{t^2}{u}$$

$$u\,du=-t^2dt$$

② INTEGRARE

$$\int u\,du=-\int t^2dt$$

$$\frac{u^2}{2}=-\frac{t^3}{3}+c$$

③ RICAVARE $\frac{u^2}{2} = -\frac{t^3+c}{3}$ ← solito discorso sul c

$$u^2 = -\frac{2}{3}(t^3+c)$$

$$\boxed{u(t) = \pm\sqrt{-\frac{2}{3}(t^3+c)}}$$

SOLUZ. GENERALE

④ DETERMINARE C. Impongo $u(0) = 4$

$$u(0) = +\sqrt{-\frac{2}{3}c} = 4 \Rightarrow -\frac{2}{3}c = 16$$

$$\Rightarrow c = -\frac{16 \cdot 3}{2} = -24$$

Ho scelto il + perché deve venire 4

La soluzione del problema di Cauchy è

$$u(t) = \sqrt{-\frac{2}{3}(t^3-24)} = \sqrt{-\frac{2}{3}t^3+16}$$

$$\boxed{u(t) = \sqrt{16 - \frac{2}{3}t^3}}$$

⑤ VERIFICARE : la cond. iniz. è facile $u(0) = \sqrt{16} = 4$

Eq. $\longrightarrow$ Esercizio

⑥ STUDIARE : $u(t)$ è definita quando $16 - \frac{2}{3}t^3 \geq 0$

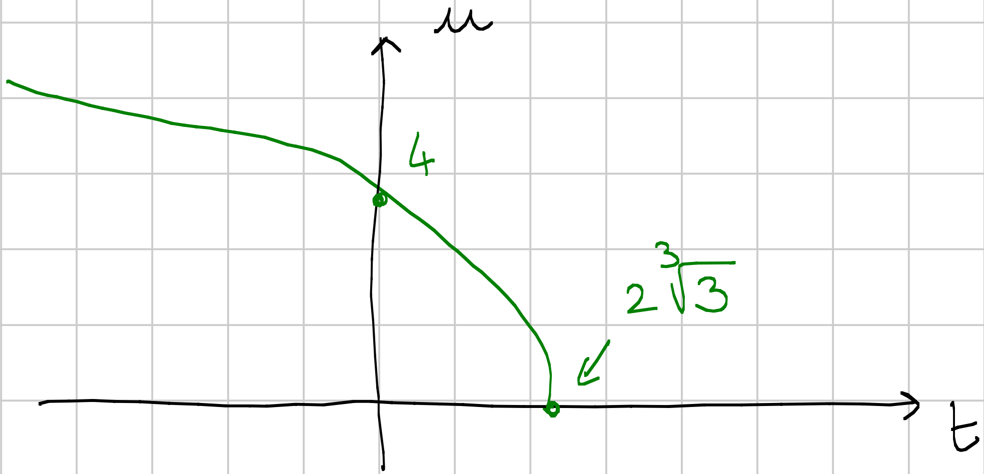
$$16 \geq \frac{2}{3}t^3 \quad ; \quad \frac{t^3}{3} \leq 8 \quad ; \quad t^3 \leq 24 \quad \Rightarrow \quad t \leq \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}.$$

Intervallo massimale di esistenza: $(-\infty, 2\sqrt[3]{3}]$

Tempo di vita: $T = 2\sqrt[3]{3}$

Non c'è blow-up, ma

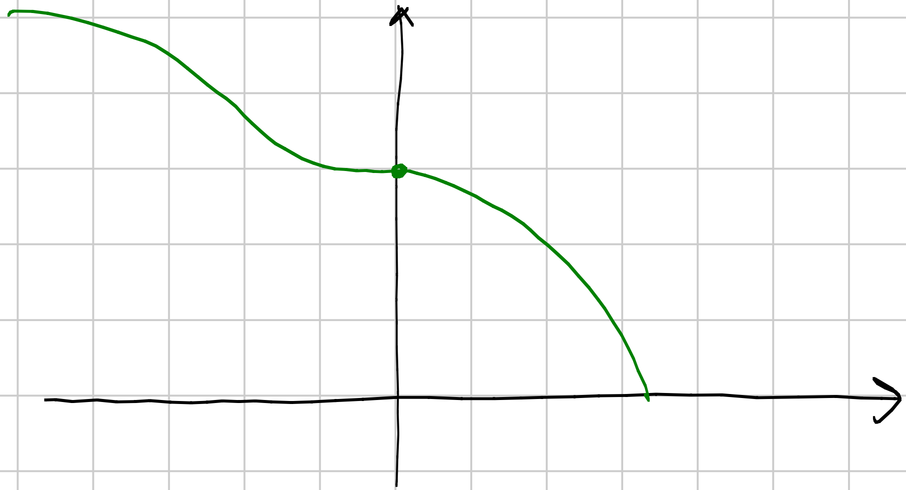
break-down



$$\lim_{t \to 2\sqrt[3]{3}^-} u(t) = 0$$

$$\lim_{t \to 2\sqrt[3]{3}^-} u'(t) = \lim_{t \to \dots} \frac{1}{2\sqrt{16 - \frac{2}{3}t^3}} \cdot (-2t^2) = -\infty$$

$$u'(0) = -\frac{0}{4} = 0$$



$$u'(t) = -\frac{t^2}{u}$$

$\Downarrow$

u' sempre negativa