MAT I TLC

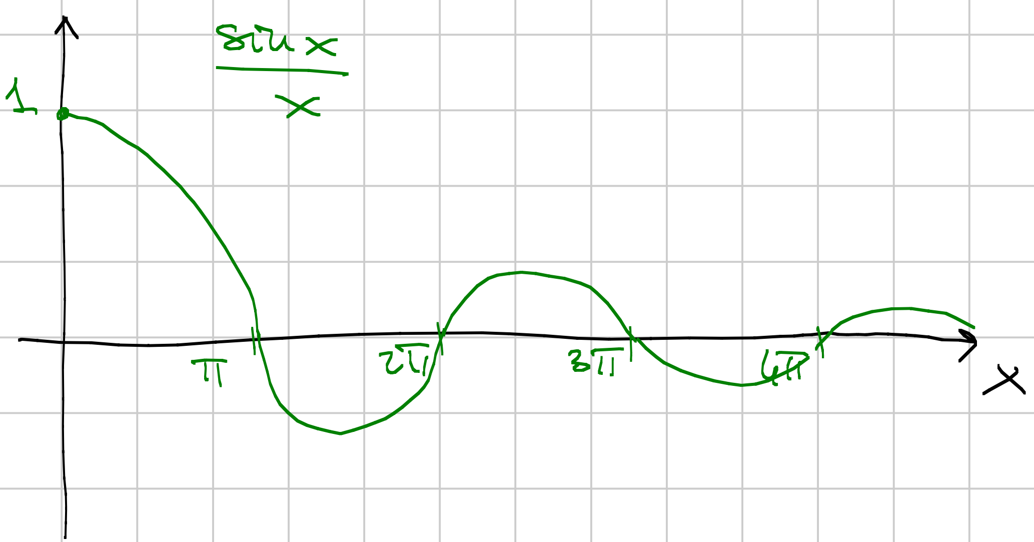
ORA 86

Titolo nota 12/12/2006

Integrali impropri: trucco dell'int. per parti

<u>Esempio</u> $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$

Unico problema è a $+\infty$, perché per $x \to 0^+$ l'integranda tende a 1.



Verrebbe da usare l'assoluta conv.

$$\frac{|\sin x|}{x} \le \frac{1}{x}$$

$\int \frac{1}{x}\, dx$ con problema a $+\infty$ diverge

$\Downarrow$

BOH

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx}_{\text{integrale proprio (numero)}} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \quad \text{si comporta come} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx \overset{\text{DEF.}}{=} \lim_{A\to+\infty} \int_1^A \overset{G}{\frac{1}{x}} \cdot \overset{f}{\sin x}\,dx =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\frac{1}{x}(-\cos x) \right]_{x=1}^{x=A} - \int_1^A \left(-\frac{1}{x^2}\right)(-\cos x)\,dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \underbrace{-\frac{\cos A}{A}}_{\to 0} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx \right\}$$

G F g F

$$= \frac{\cos 1}{1} - \lim_{A \to +\infty} \int_1^A \frac{\cos x}{x^2}\,dx = \frac{\cos 1}{1} - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx}_{\text{NUMERO}}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ converge. Infatti

$\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ $\quad 0 \leq \frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ + confronto

$\int \frac{|\cos x|}{x^2}\,dx$ con problema a $+\infty$ converge

$\Downarrow$ $\quad$ Assoluta integrabilità

$\int \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ con problema a $+\infty$ converge

NOTA BENE: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ DIVERGE A $+\infty$

Infatti: l'integranda è positiva per $x \sim 0$. Applico C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$

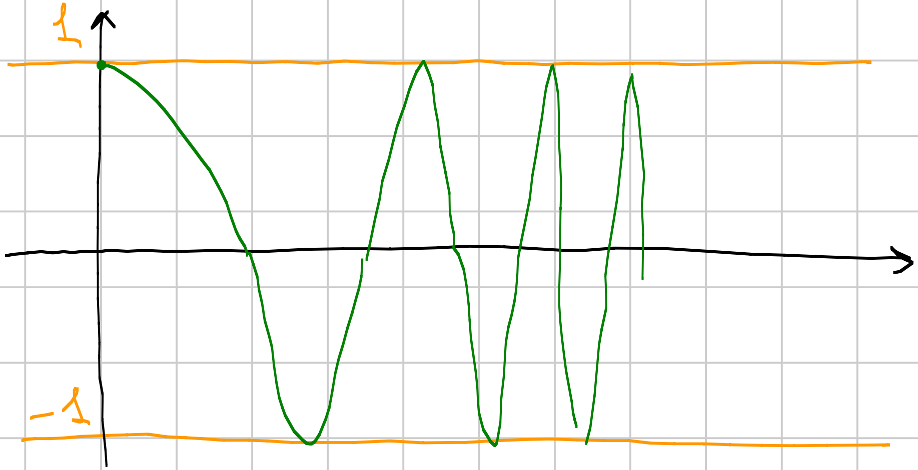
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{x^2}\cdot x^2 = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 \begin{array}{l}\neq 0\\ \neq +\infty\end{array}$$

Quindi $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ con problema in $x=0$ si comporta come

$\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con problema in $x=0$, dunque diverge.

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$



NOTA BENE: l'integranda non tende a zero per $x \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \quad \text{si comporta come} \quad \int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,dx \overset{\text{DEF.}}{=} \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \cos x^2\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \underbrace{\frac{1}{2x}}_{G} \cdot \underbrace{2x\cos(x^2)}_{f}\,dx$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \left[\underbrace{\frac{1}{2x}}_{G} \cdot \underbrace{\sin(x^2)}_{F} \right]_{x=1}^{x=A} - \int_1^{A} \underbrace{\left(-\frac{1}{2x^2}\right)}_{g} \underbrace{\sin(x^2)}_{F}\,dx \right\}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \underbrace{\frac{\sin A^2}{2A}}_{\to\, 0} - \frac{\sin(1)}{2} + \int_1^{A} \frac{\sin(x^2)}{2x^2}\,dx \right\}$$

$$= -\frac{\sin(1)}{2} + \underbrace{\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{2x^2}\,dx}}_{\text{converge}} \implies \text{quello iniz. conv.}$$

$\int \frac{dx}{x^2}$ con pb. a $+\infty$ conv. $\underset{\text{confronto}}{\Longrightarrow}$ $\int \frac{|\sin(x^2)|}{x^2}\,dx$ con pb. a $+\infty$ conv.

$\Downarrow$ ← Assol. int.

$\int \frac{\sin(x^2)}{x^2}\,dx$ con prob. a $+\infty$ conv.

— o — o —

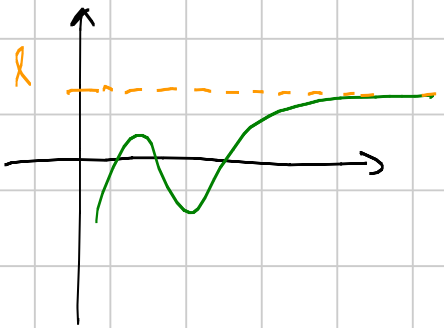
Nello stesso modo si mostra che $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx$ converge

Osservazione 1 Non vale l'analogo della condizione nec. per le serie.

Può succedere che $f(x)$ non abbia limite per $x \to +\infty$ ma

$\int f(x)\,dx$ con pb. a $+\infty$ converga.

Osservazione 2 È comunque vero che se $f(x) \to \ell > 0$ per

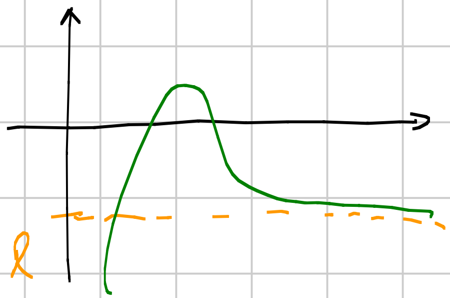


$x \to +\infty$, allora

$\int f(x)\,dx$ con pb. a $+\infty$ diverge a $+\infty$

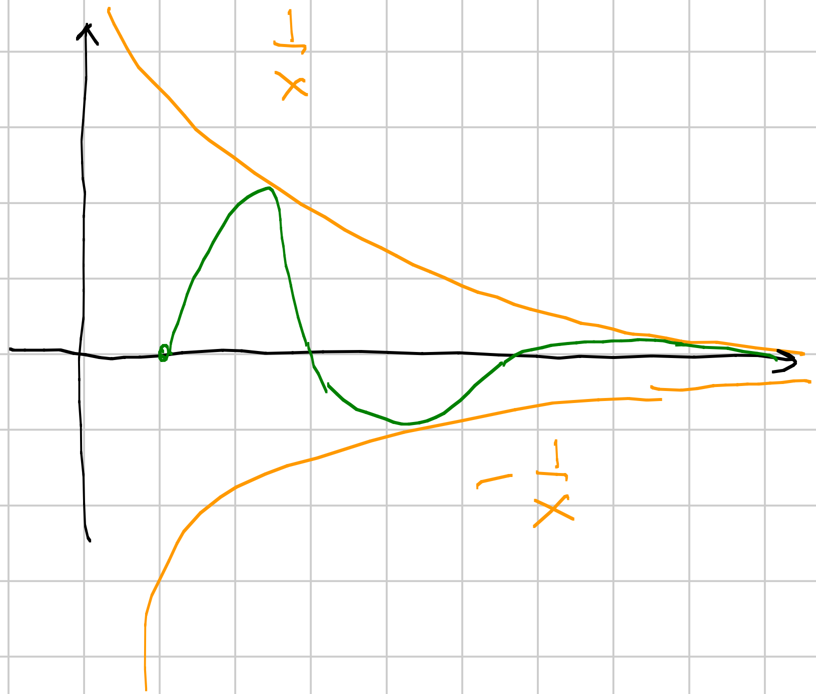
e se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l < 0$, allora

$\int f(x)\,dx$ con pb. a $+\infty$ diverge a $-\infty$



— o — o —

<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx$



Si annulla dove $\sin(\log x) = 0$,
cioè dove $\log x = n\pi$, cioè dove

$$x = e^{n\pi}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx =$$

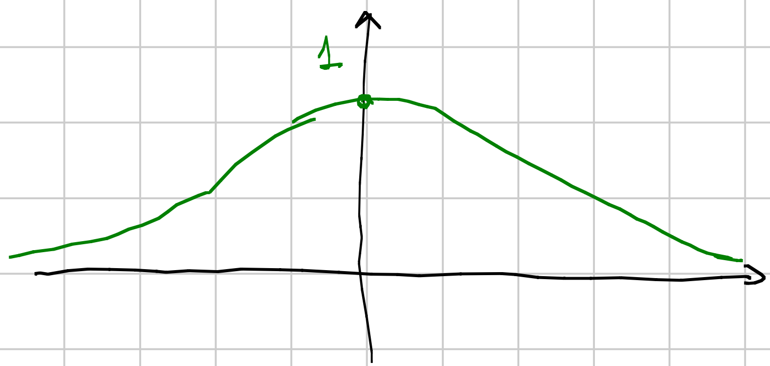
$$= \lim_{A\to+\infty} \Big[-\cos(\log x) \Big]_{x=1}^{x=A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \Big\{ \underbrace{-\cos(\log A)}_{\text{oscilla tra } -1 \text{ e } 1} + 0 \Big\} = \text{N.E.}$$

$\Rightarrow$ l' integrale è indeterminato.

<u>Esempio 4</u> $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2I$

$$\int_0^{+\infty} = \int_{-\infty}^{0}$$



$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$ converge. Perché?

Ad esempio per C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^8}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^8}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^8}{e^{x^2}} = 0$$ ↗ CASO LIMITE

[Quindi $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 1$ per x grandi, quindi $f(x) \leq g(x)$ per x grandi]

$\int g(x)\,dx$ con problema a $+\infty$ converge $\Rightarrow \int e^{-x^2}$ con pb. a $+\infty$ converge

MAT 1 TLC

ORA 87

Calcolo esplicito di $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \underbrace{\int_0^A e^{-x^2}\,dx}_{I_A}$

Passo in 2 variabili. Calcolo

$$\iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy =$$

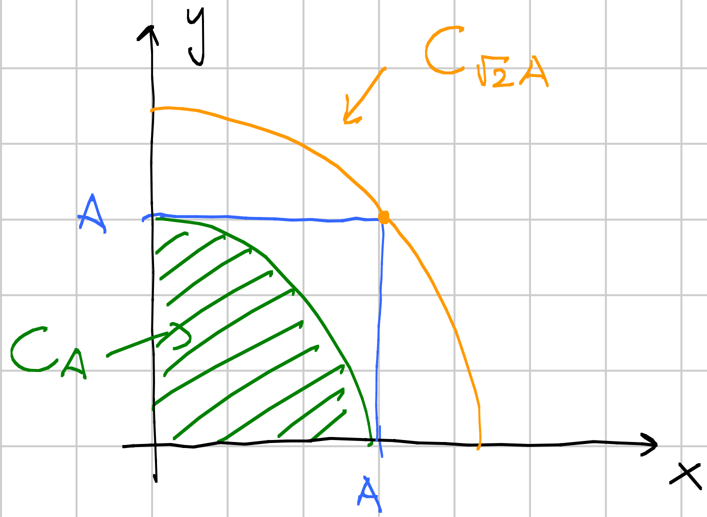
$$= \int_0^A dx \int_0^A dy\; e^{-x^2-y^2} =$$

$$= \int_0^A dx \int_0^A dy\; e^{-x^2}\cdot e^{-y^2} = \int_0^A e^{-x^2}dx \underbrace{\int_0^A e^{-y^2}dy}_{I_A}$$

$$= I_A \underbrace{\int_0^A e^{-x^2}dx}_{I_A} = I_A^2$$

Abbiamo che

(essendo $e^{-x^2-y^2}$ una funzione positiva)



$$\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \le \underset{\underset{I_A^2}{\shortparallel}}{\iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy} \le \iint_{C_{\sqrt{2}A}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^A d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta}_{C_A \text{ in coord. polari}} \underbrace{e^{-\rho^2}}_{e^{-x^2-y^2}} \rho \; d\rho \quad =$$

pag.

$$= \int_0^A \rho e^{-\rho^2} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^A \rho e^{-\rho^2} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_{\rho=0}^{\rho=A}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} \right\}$$

Cosa succede quando $A \to +\infty$?

$$\iint_{C_A} \dots = \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-A^2} + \frac{1}{2} \right\} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{C_{\sqrt{2}A}} = \frac{\pi}{2} \left\{ -\frac{1}{2} e^{-2A^2} + \frac{1}{2} \right\} \longrightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\iint_{Q_A} \dots = I_A^2 \longrightarrow \left[\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = I^2$$

$$\boxed{\iint_{C_A} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy} \le \boxed{\iint_{Q_A} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy} \le \boxed{\iint_{C_{\sqrt{2}A}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\frac{\pi}{4} \qquad\qquad I^2 \qquad\qquad \frac{\pi}{4}$$

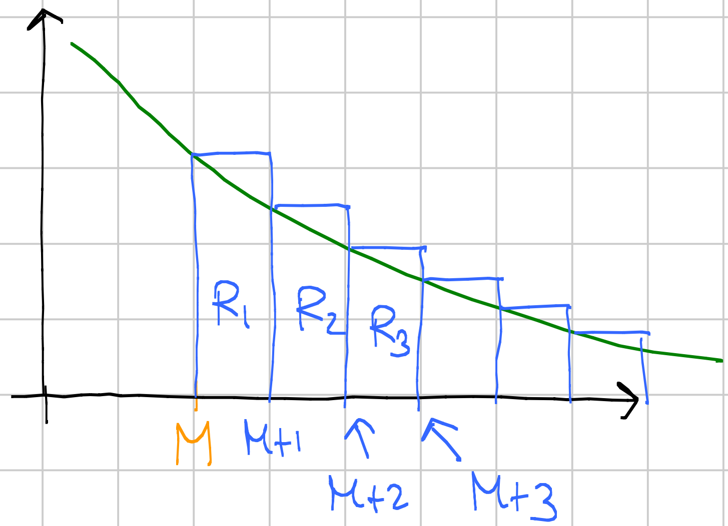
Per i carabinieri si ha che $I^2 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = 2I = \sqrt{\pi}$$

— o — o —

CRITERIO SERIE $\longleftrightarrow$ INTEGRALI

1ª PARTE: GLI INTEGRALI AIUTANO LE SERIE

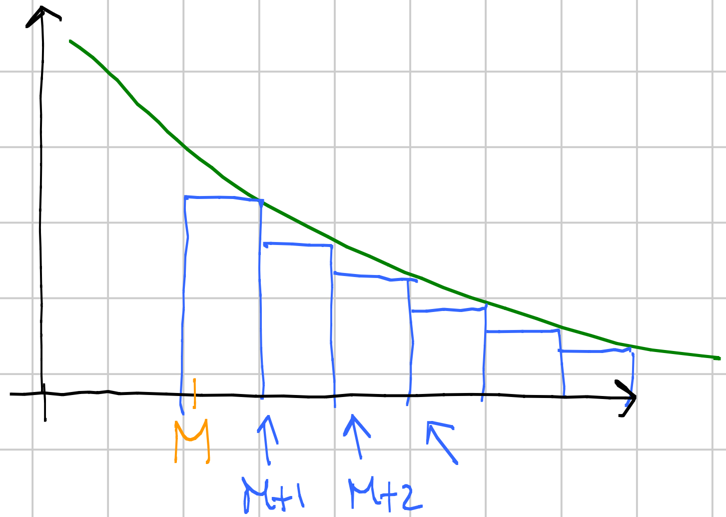


Sia M un intero. Sia

$f : [M, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione

- positiva: $f(x) > 0$
- debolmente decrescente

1ª figura:



$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \text{somma aree dei rettangoli}$$

$$= \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)$$

R_1 ha base 1 e altezza $f(M) \to$ area $f(M)$

R_2 " " " $f(M+1) \to$ area $f(M+1)$ e così via

$\boxed{2^a \text{ figura}}$

$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \geq \text{somma aree dei rettangoli}$$

$$= f(M+1) + f(M+2) + \dots$$

$$= \sum_{n=M+1}^{\infty} f(n)$$

$\boxed{\text{Conclusione}}$

$$\boxed{\sum_{n=M+1}^{+\infty} f(n) \leq \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=M}^{+\infty} f(n)}$$

CRITERIO CONFRONTO SERIE INTEGRALI

Se f è positiva e deb. decr., allora

$$\int_M^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=M}^{+\infty} \text{ converge}$$

Applicazione:

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\Leftrightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge

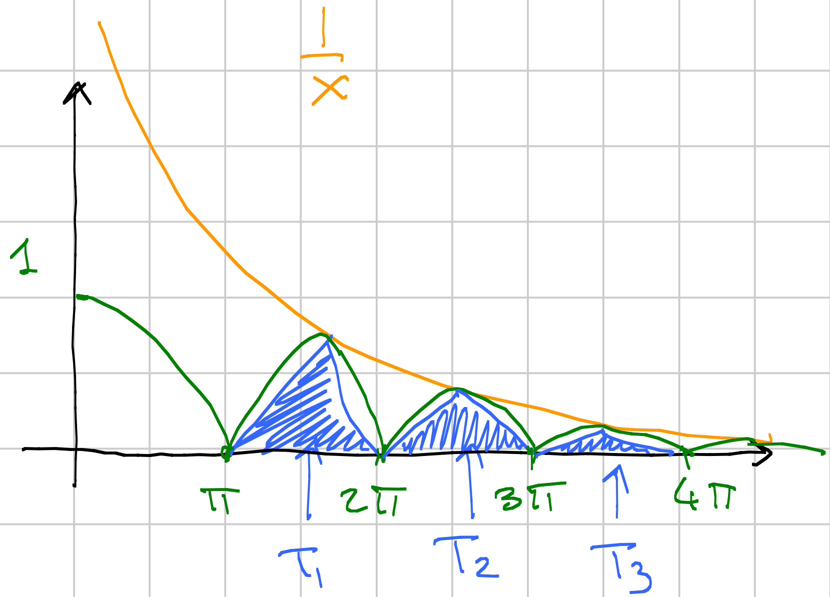
Noi sappiamo quando l'integrale converge (fatto con la primitiva) quindi deduciamo quando la serie converge.

$\boxed{2^a \text{ parte}}$ LE SERIE AIUTANO GLI INTEGRALI

$\boxed{\text{METODO DEI TRIANGOLINI}}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \text{somma aree dei triangolini}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

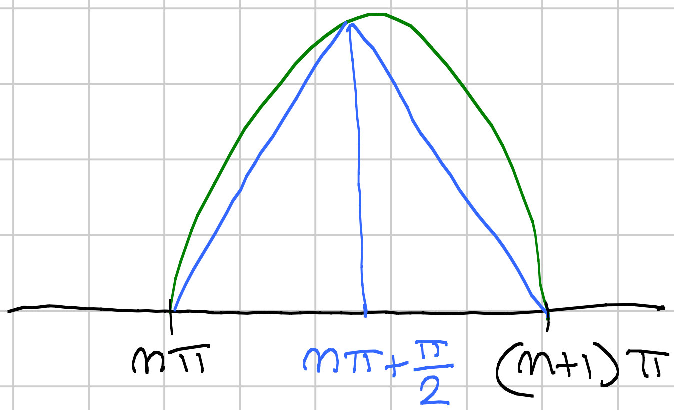


Base di T_n = segmento $[n\pi, (n+1)\pi]$

$\Rightarrow$ lunghezza $= \pi$

Altezza di T_n = valore della funzione nel p.to di mezzo

$$= \frac{\left|\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right|}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$



$$= \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{Area}(T_n) = \frac{1}{2}\,\text{base} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{Area}(T_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

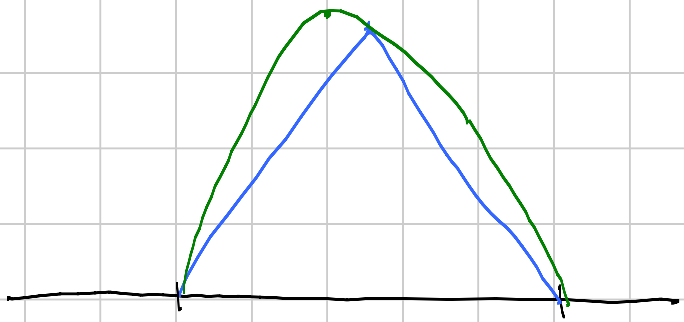
Diverge perchè si comporta come $\sum \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ l'int. improprio diverge

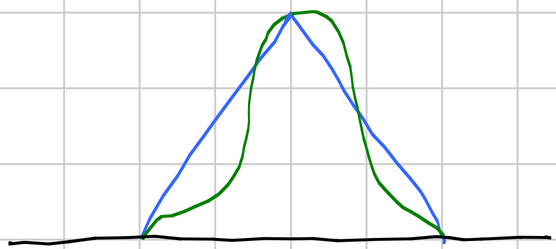
È vero che il vertice del Δ è il p.to di max della funzione nell'intervallo ?

NO !!!!!

Basta fare la derivata e vedere che in mezzo non si annulla



Per usare i triangolini dovrei accertarmi che le cose non stiano così



Esercizio: provare a fare lo stesso con

$$\int_0^{+\infty} |\cos(x^2)|\, dx = +\infty$$