MAT I TLC

Titolo nota

ORA 83

09/12/2006

INTEGRALI TRIPLI

1. NOTAZIONI $A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato

$f : A \to \mathbb{R}$ limitata

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

2./3. SIGNIFICATO GEOMETRICO/FISICO E DEF.

A = solido nello spazio $f(x,y,z) > 0$ e rappresenti la densità del materiale di cui è composto il solido (eventualmente varia da punto a punto)

Obiettivo: calcolare il peso del solido

<u>Caso banale</u>: solido A è un parallelepipedo con lati paralleli agli assi $\underset{x}{[a,b]} \times \underset{y}{[c,d]} \times \underset{z}{[e,f]}$

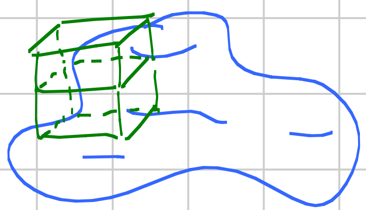
$f(x,y,z)$ = costante λ su tutto A.

$$\text{Peso} = \text{Volume}(A) \cdot \lambda$$
$$= (b-a)(d-c)(f-e) \cdot \lambda$$

<u>Caso semi-banale</u>: solido A = unione di "mattoni" (parallelepipedi) su ciascuno dei quali la densità è costante.

Peso = somma dei pesi dei singoli mattoni

<u>Caso generale</u>: A = limitato qualunque
$f(x,y,z)$ = funzione limitata qualunque



Si suddivide il solido in tanti mattoncini
Si suppone la densità costante in ogni mattone.

Si calcola un'approssimazione del peso sommando i pesi dei singoli mattoni.

L'approssimazione risulta

* per eccesso se su ogni mattone ho preso densità costante $\geq$ densità vera, e l'unione di tutti i mattoni contiene il solido

* per difetto nel caso opposto

Se l'approssimazione dal basso e dall'alto al limite convergono allo stesso valore questo è per definizione il peso del solido

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

4. TECNICHE DI CALCOLO : Formule di riduzione

$\boxed{3 = 1+1+1}$ $\boxed{3 = 2+1}$ $\boxed{3 = 1+2}$

Formula di riduzione sui parallelepipedi

$A = [a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ f = qualunque

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz}\; f(x,y,z)}$$

Posso avere 6 formule diverse a seconda dell'ordine in cui integro rispetto alle 3 variabili

Esempio $A = [0,1] \times [0,2] \times [1,4]$

$$\iiint_A yz e^x \,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^4 dz \; yz e^x =$$

$$= \int_0^1 e^x\,dx \int_0^2 y\,dy \int_1^4 z\,dz$$

$$= \int_0^1 e^x\,dx \int_0^2 y\,dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=1}^{z=4} =$$

$$= \frac{15}{2}\int_0^1 e^x\,dx \int_0^2 y\,dy = \frac{15}{2}\int_0^1 e^x\,dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=2}$$

$$= 15\int_0^1 e^x\,dx = 15\left[e^x\right]_{x=0}^{x=1} = 15(e-1).$$

— o — o — o —

Esempio 2 $\quad A = [0,1]\times[-1,1]\times[0,2]$

$$\iiint_A e^{xz}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_{-1}^1 dy \int_0^2 dz\; e^{xz} \quad \text{oppure}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dz \int_{-1}^1 dy \, e^{xz} = \int_0^1 dx \int_0^2 dz \, e^{xz} \underbrace{\int_{-1}^1 dy}_{\text{lungh. interv.} = 2}$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_0^2 dz \, e^{xz} =$$

$$= 2 \int_0^1 dx \left[\frac{e^{xz}}{x} \right]_{z=0}^{z=2} = 2 \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

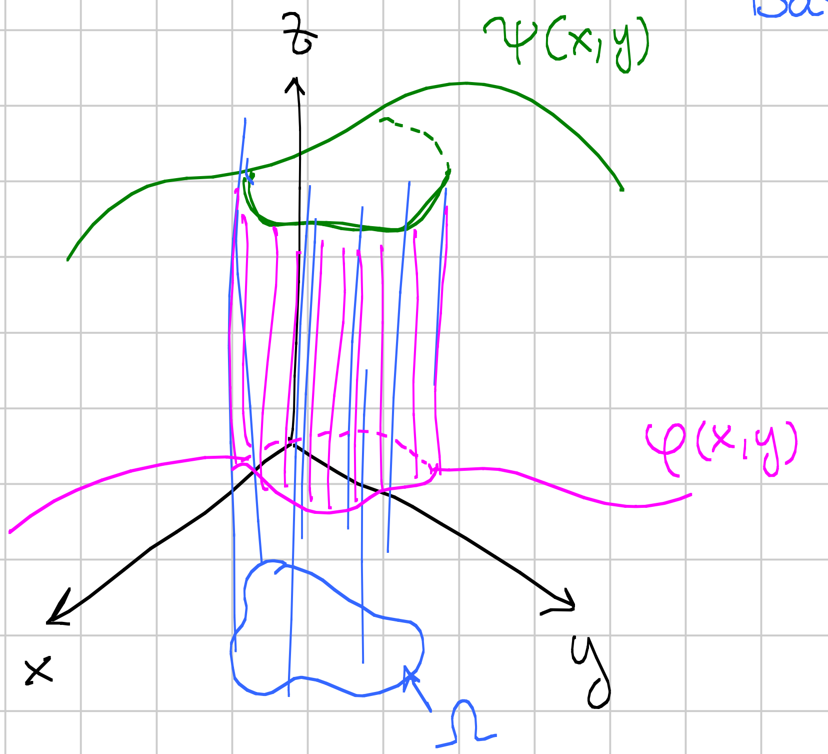
$$= 2 \int_0^1 \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{x}}_{\text{tende a 2 per } x \to 0 \text{, quindi l'integrale NON è improprio}} dx =$$

la primitiva penso che non venga

INSIEMI NORMALI (rispetto al piano base xy)

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è normale rispetto al piano xy se è della forma

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ (x,y) \in \underset{\text{Base}}{\Omega} , \ \underset{\text{tappo basso}}{\varphi(x,y)} \le z \le \underset{\text{tappo alto}}{\psi(x,y)} \}$$



$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \leftarrow$ piano base

Brutalmente: A è una "lattina" di cui $\psi(x,y)$ rappresenta il tappo e $\varphi(x,y)$ rappresenta il fondo

Formula di riduzione su insiemi normali:

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} dz\, f(x,y,z)}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER COLONNE

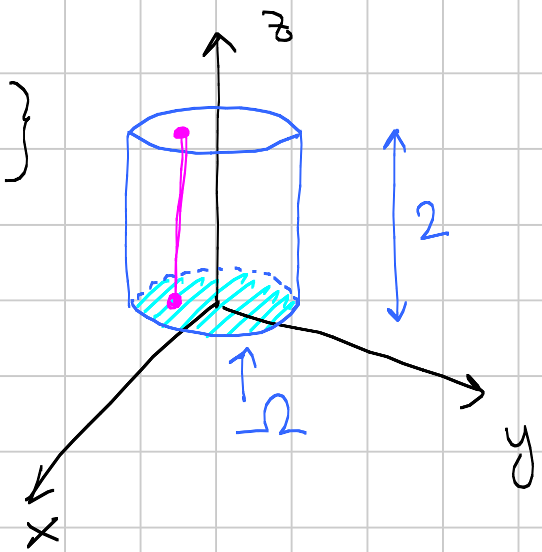
Idea: su ogni punto (x,y) della base Ω tiriamo la retta $\perp$ al piano base. Tale retta interseca l'insieme A in un segmento di estremi $\varphi(x,y)$ e $\psi(x,y)$.
Questo segmento è la COLONNA su (x,y).

<u>Esempio</u> A = cilindro che ha come base il cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1 e altezza $=2$.

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz =$$

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; ; \; (x,y) \in \Omega , \; 0 \le z \le 2 \}$$

cerchio nel piano



colonne

$$= \iint_{\Omega} dx\,dy \int_0^2 dz \cdot z = \iint_{\Omega} dx\,dy \left[\frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{z=2}$$

$$= 2 \iint_{\Omega} dx\,dy = 2 \, \text{Area}(\Omega)$$

$$= 2\pi .$$

Formula di integrazione per SEZIONI

$$A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [a, b], \quad (x,y) \in S_z \}$$

minima quota

max. quota

Sezione di A ad altezza z

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx\,dy\, f(x,y,z)}$$

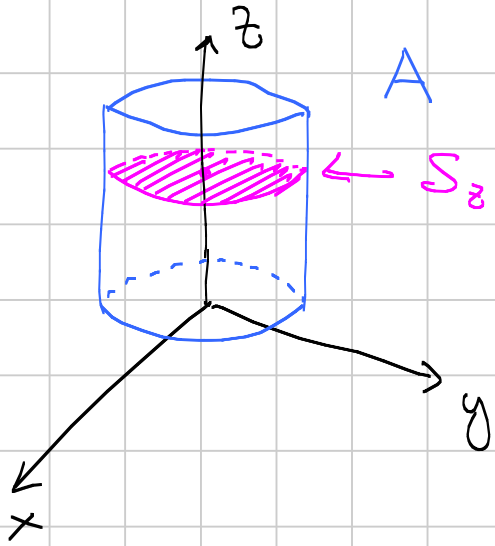
FORMULA DI INT. PER SEZIONI

<u>Esempio 1</u> $\iiint_A z \, dx\,dy\,dz =$

$A =$ cilindro prec,

sezioni

$$= \int_0^2 dz \iint_{S_z} dx\,dy \cdot z =$$



S_z = sezione cilindro ad altezza z
= cerchio con centro in $(0,0)$
e raggio 1

$$= \int_0^2 z\,dz \iint_{S_z} dx\,dy = \int_0^2 z \cdot \text{Area}(S_z)\,dz = \pi \int_0^2 z\,dz = 2\pi$$

— o — o —

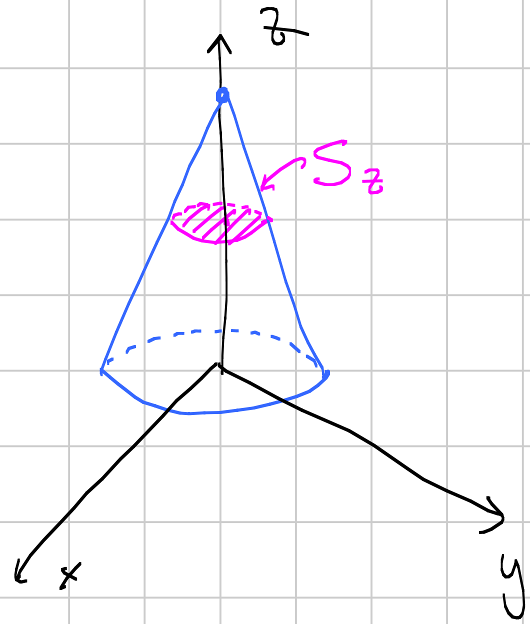
Esempio 2 $\quad A$ = cono con base cerchio con centro in $(0,0)$
e raggio 2, altezza $= 3$

$$f(x,y,z) = z^2$$

$$\iiint_A z^2\,dx\,dy\,dz \overset{\text{sez.}}{=} \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx\,dy\; z^2$$

$$= \int_0^3 z^2\,dz \iint_{S_z} dx\,dy =$$

$$= \int_0^3 z^2\,dz \cdot \text{Area}(S_z) =$$



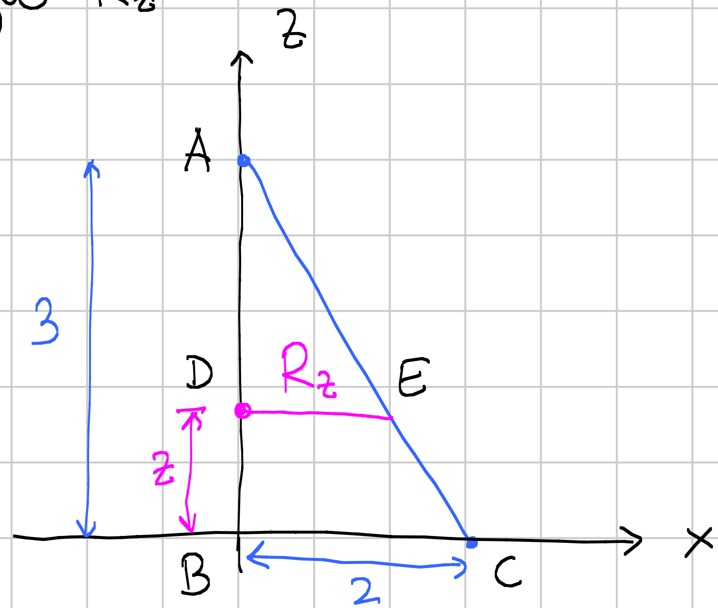
S_z = cerchio con centro in (0,0) e raggio R_z

Dalla similitudine $ADE \sim ABC$ ho che

$$AD : DE = AB : BC$$

$$(3-z) : R_z = 3 : 2$$

$$R_z = \frac{2(3-z)}{3} = \boxed{2 - \frac{2}{3}z}$$



$$R_z = 2 - \frac{2}{3} z \qquad \text{Controllo} \begin{cases} z = 0 \rightarrow R_z = 2 \\ z = 3 \rightarrow R_z = 0 \end{cases}$$

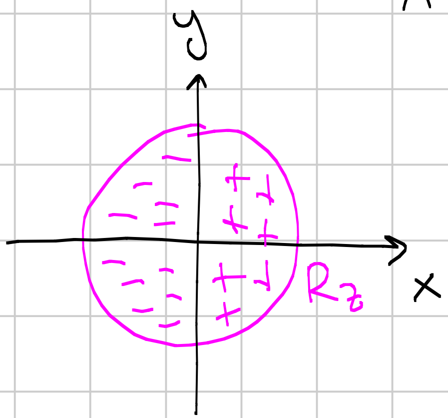
$$= \int_0^3 z^2 \underbrace{\pi \left(2 - \frac{2}{3} z\right)^2}_{\text{Area}(S_z) = \pi (R_z)^2} dz \quad = \text{si fa facilmente.}$$

— o — o —

Esempio 2.5 $\quad A$ = cono dell'esempio 2

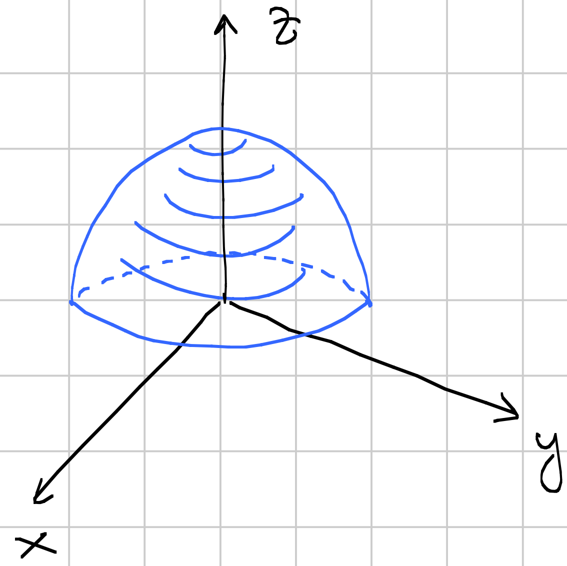
$$\iiint_A x z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx\,dy \; x z^2$$

sez.



$$= \int_0^3 z^2 dz \underbrace{\iint_{S_z} x \, dx\,dy}_{0} = 0$$

Esempio 3 $\quad A =$ semisfera di raggio 1

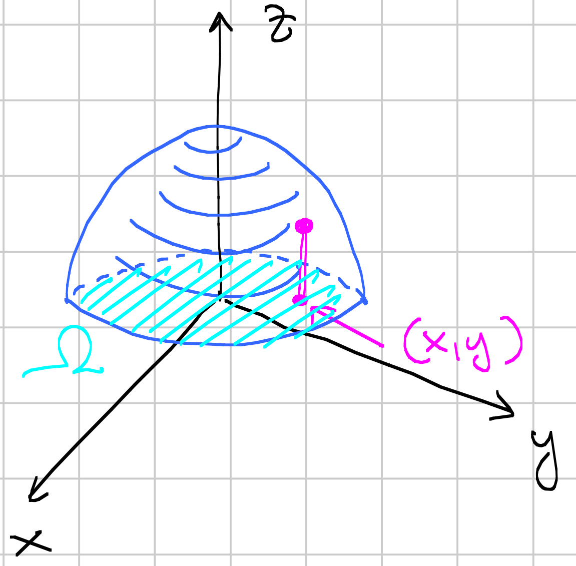


$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz$$

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x^2+y^2+z^2 \leq 1, \ z \geq 0\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \ 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

Descrizione come insieme normale risp. piano base xy



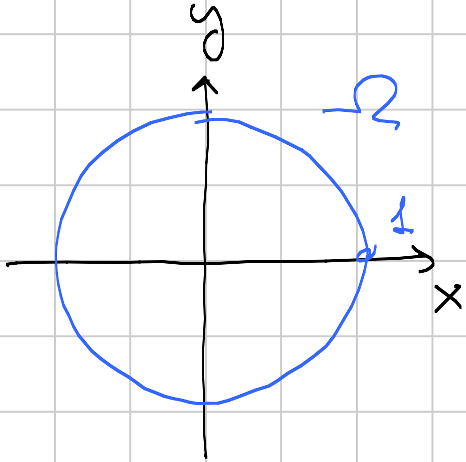
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1], (x,y) \in S_z\}$$

Descrizione per sezioni

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz \underset{\text{colonne}}{=} \iint_\Omega dx\,dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \cdot z$$

$$= \iint_\Omega dx\,dy \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_\Omega (1-x^2-y^2)\,dx\,dy$$



COORDINATE POLARI

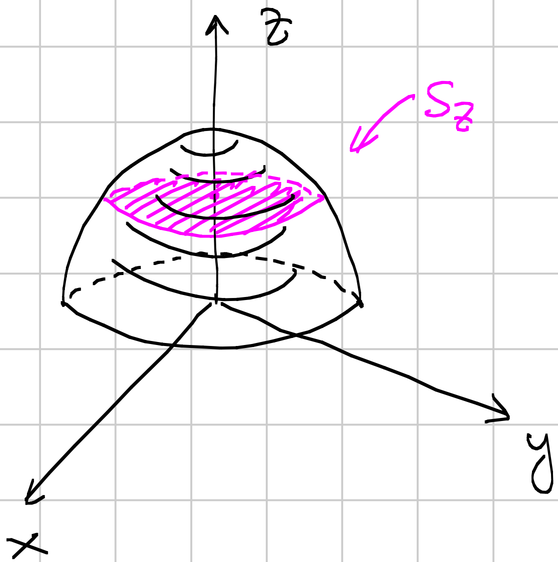
$$= \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta}_{\Omega \text{ in coord. polari}} \underbrace{(1-\rho^2)}_{1-x^2-y^2} \underbrace{\rho}_{\text{PAG}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = \pi \int_0^1 (\rho-\rho^3)\,d\rho =$$

$$= \pi \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

— o — o —

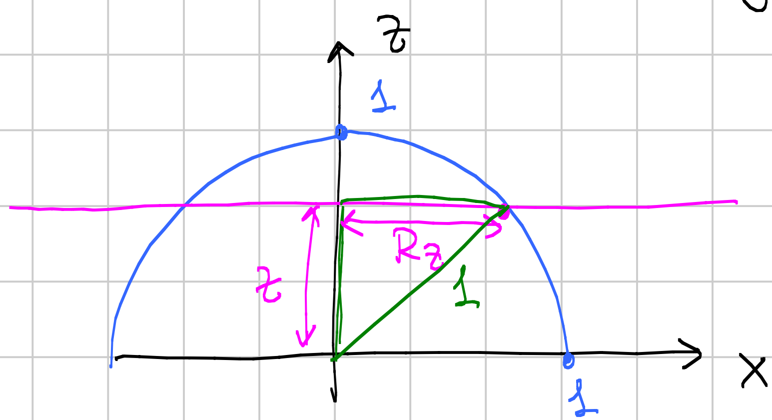
$$\iiint_A z \, dx\,dy\,dz \overset{\text{sezioni}}{=} \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx\,dy \cdot z$$



$$= \int_0^1 z \, dz \iint_{S_z} dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz =$$

S_z è un cerchio di raggio R_z



Pitagora $\Rightarrow z^2 + R_z^2 = 1$

$\Rightarrow R_z = \sqrt{1 - z^2}$

S_z è un cerchio di raggio $\sqrt{1-z^2}$ $\to$ $z=0 \rightsquigarrow R=1$

$\searrow$ $z=1 \rightsquigarrow R=0$

$$= \int_0^1 z \cdot \underbrace{\pi R_z^2}_{\text{Area}(S_z)} \qquad = \pi \int_0^1 z\left(1-z^2\right) dz = \pi \int_0^1 \left(z-z^3\right) dz$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

Cambi di variabile negli integrali tripli + coordinate cilindriche + coord. sferiche

COORD. CILINDRICHE

Cartesiane (x, y, z)

Cilindriche (ρ, θ, z)

z è la stessa, (ρ, θ) sono le polari corrispondenti a (x, y)

z è la quota di P,

ρ = distanza della proiezione di P dalla torre di controllo

θ = angolo solito

Quando si integra in coord. cilindriche $J = \rho$

Esempio A = solito cilindro con raggio base = 1 e alt. = 2

In coord. cilindriche A diventa: $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $z \in [0,2]$

$$\iiint_A z \, dx\, dy\, dz = \underbrace{\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz}_{\text{Descriz. di A in COORD. CILINDR.}} \quad \underbrace{z}_{\text{Sempre } z \text{ è}} \quad \underbrace{\rho}_{\text{pag.}}$$

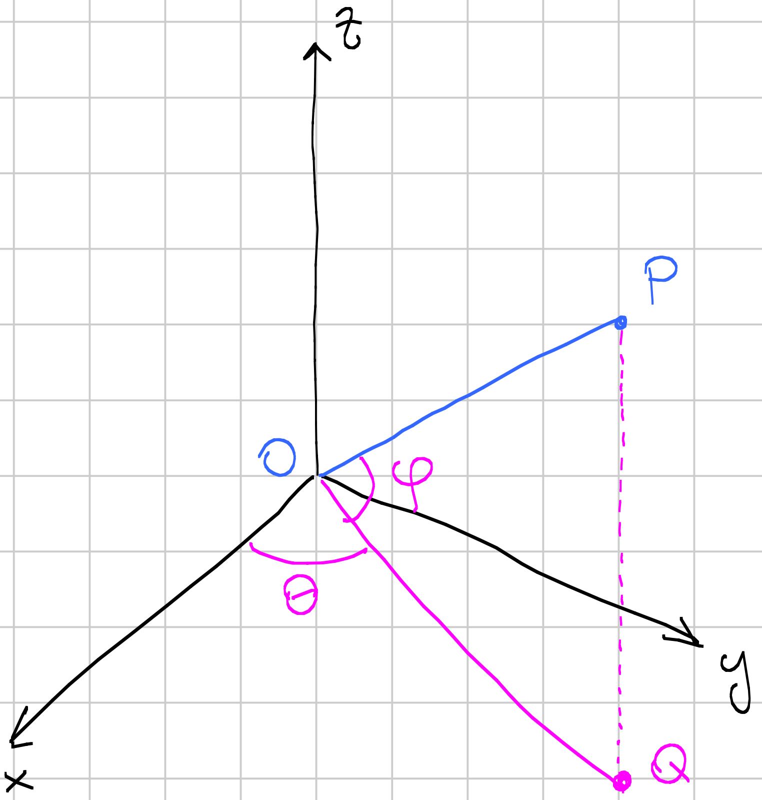
$$= \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 z\, dz =$$

$$= \int_0^1 \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=2} = 2 \int_0^1 \rho\, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$$

$$= 4\pi \int_0^1 \rho\, d\rho = 2\pi$$

COORDINATE SFERICHE

(ρ, θ, φ)



ρ = lunghezza di OP =
= distanza di P dall'origine

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Sia Q la proiezione di P sul piano base xy

[OQ sarebbe il ρ delle coord. cilindriche]

φ = angolo tra OQ e OP = angolo tra OP e piano base xy

θ = angolo tra OQ e semiasse positivo delle x (solito)

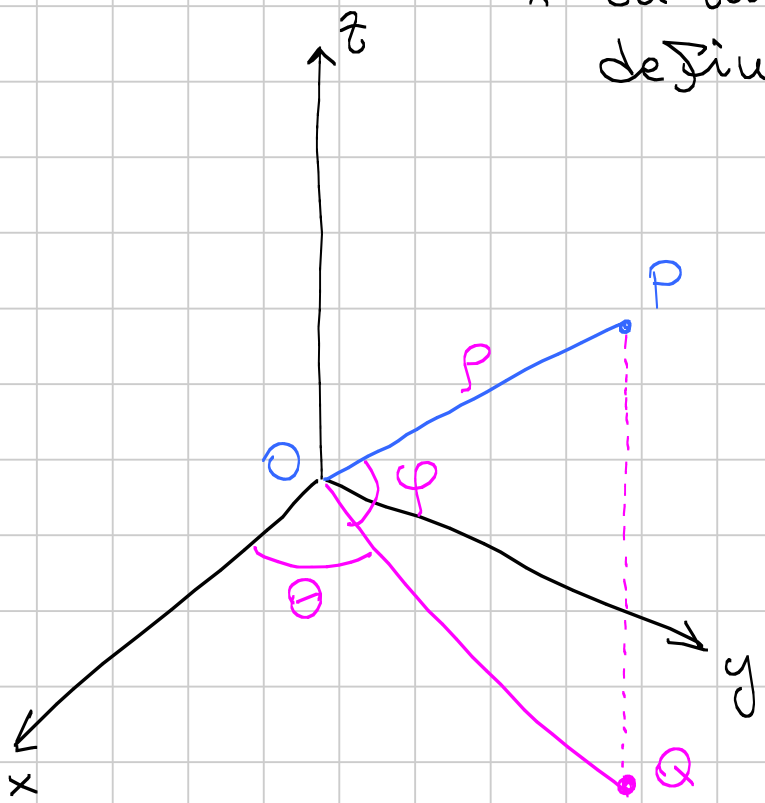
Dove variano? $\rho \geq 0$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

LATITUDINE (φ) LONGITUDINE (θ)

Casi particolari:

* nell'origine si ha $\rho = 0$, mentre θ e φ non sono definite

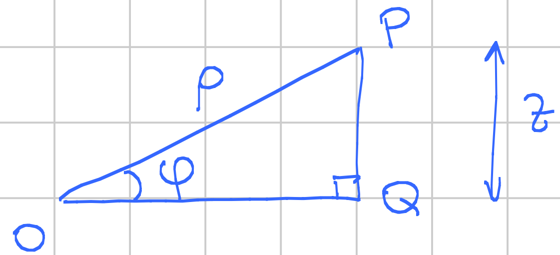
* su tutti i punti dell'asse z non è definita θ



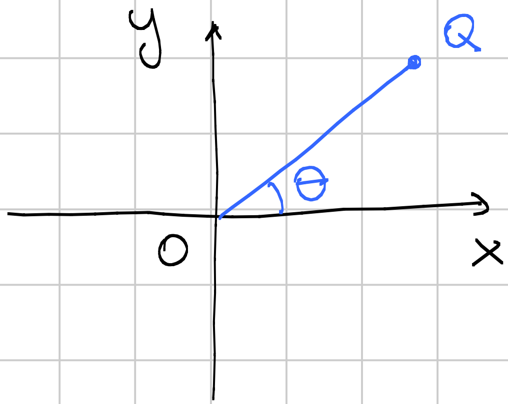
FORMULE DI PASSAGGIO

z = lungh. con segno di PQ

$= \rho \sin \varphi$



Analogamente $OQ = \rho \cos\varphi$



$x = OQ \cdot \cos\theta = \rho \cos\varphi \cos\theta$

$y = OQ \cdot \sin\theta = \rho \cos\varphi \sin\theta$

$$\boxed{x = \rho \cos\varphi \cos\theta, \qquad y = \rho \cos\varphi \sin\theta, \qquad z = \rho \sin\varphi}$$

FORMULE DI PASSAGGIO

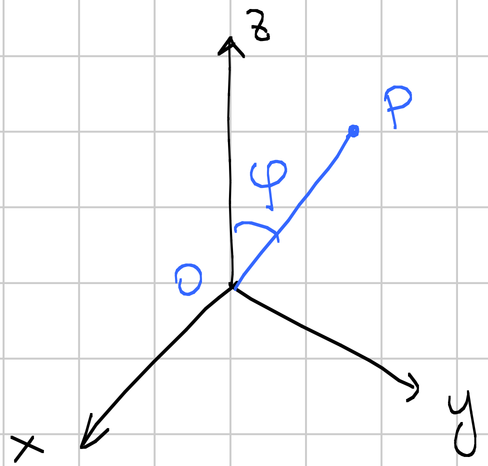
Come si calcola J? 1. Ricavare x, y, z in funzione di ρ, θ, φ (appena fatto)

2. Matrice jacobiana

$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta & x_\varphi \\ y_\rho & y_\theta & y_\varphi \\ z_\rho & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}$$

3. $J(\rho,\theta,\varphi) = |\operatorname{Det}(\text{matrice})| = \boxed{\rho^2\cos\varphi}$

ACHTUNG!!! I fisici talvolta definisco diversamente le coord. sferiche.
Definita come in figura
φ varia da 0 a π.
In tutte le formule che contengono φ si scambiano $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$ (compreso nel J.)



— o — o —

<u>Esempio 1</u> $A =$ "semisfera alta" $x^2+y^2+z^2 \le 1$, $z \ge 0$.

In coord. sferiche si descrive come

$$\rho \in [0,1], \quad \theta \in [0,2\pi], \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi}_{\text{Descrizione di } A \text{ in coord. sferiche}} \; \underbrace{\rho \sin\varphi}_{z} \; \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{PAG}$$

$$= \int_0^1 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\overbrace{2\cos\varphi \cdot \sin\varphi}^{\sin(2\varphi)}}{2}\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho \left[-\frac{\cos(2\varphi)}{4} \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2 d\rho \left\{ \frac{-(-1)+1}{4} \right\} = \pi \int_0^1 \rho^3 d\rho =$$

$$= \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{\pi}{4}$$

<u>Esempio 2</u> A = sfera con centro in $(0,0,0)$ e raggio 1

$$\iiint_A x^2 \, dx\,dy\,dz = \underbrace{\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi}_{\text{TUTTA LA SFERA}} \; \underbrace{\rho^2 \cos^2\theta \cos^2\varphi}_{x^2} \; \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{J}$$

$$= \int_0^1 \rho^4 \, d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \cos^3\varphi \, d\varphi =$$ provare e viene

$$\iiint_A x^2 \, dx\,dy\,dz = \iiint_A y^2 \, dx\,dy\,dz = \iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_A z^2 \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \; \underbrace{\rho^2 \sin^2\varphi}_{z^2} \; \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{J}$$

$$= \int_0^1 \rho^4 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi \, d\varphi}_{\left[\frac{\sin^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}}$$

$$= 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 \rho^4 d\rho = 2\pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{15}\pi$$

— o —

In alternativa bastava calcolare

$$\frac{1}{3} \iiint_A \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{\rho^2} dx\,dy\,dz$$