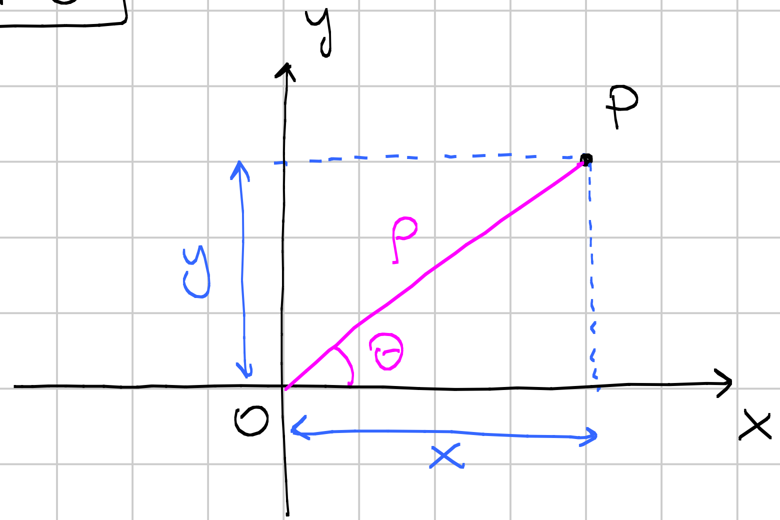
COORDINATE POLARI NEL PIANO

Un punto P nel piano si può identificare tramite le sue coord. cartesiane (x, y) oppure tramite le sue coord. polari ρ e θ



ρ = distanza di P dall'origine

θ = angolo tra semiasse positivo delle x e OP, contato in senso antiorario

$\rho \geq 0$ $\qquad$ θ = angolo definito a meno di multipli di 2π

Caso particolare: se P è nell'origine, allora $\rho = 0$ e θ non è definito.

FORMULE DI PASSAGGIO

Se conosco ρ e θ posso calcolare x e y mediante

$$\boxed{x = \rho\cos\theta} \qquad \boxed{y = \rho\sin\theta}$$

Se conosco x e y posso calcolare $\boxed{\rho = \sqrt{x^2+y^2}}$.

Per θ la situazione è più delicata.

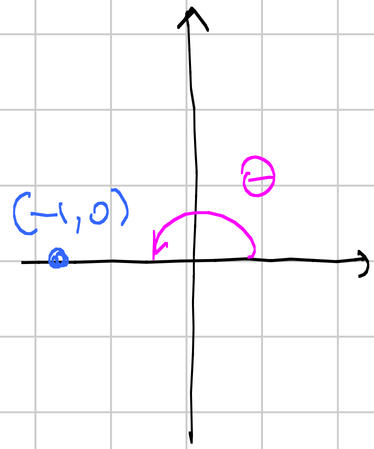
Apparentemente $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \boxed{\theta = \arctan\dfrac{y}{x}}$

NIIII - - -.

Intanto servirebbe $x \neq 0$ per poter dividere. Il grosso problema è che la formula vale SOLO nel I e IV quadrante.

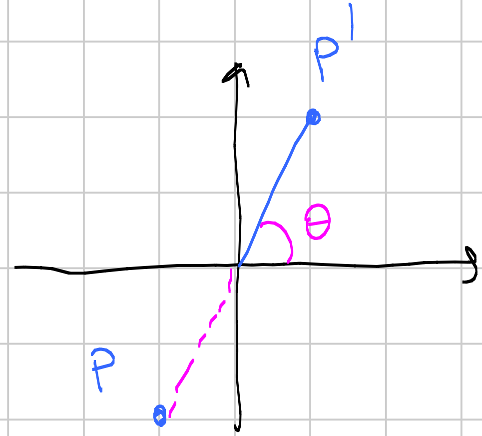
Esempio $P = (-1, 0)$ Se uso la formula

$$\theta = \arctan \frac{0}{(-1)} = \arctan 0 = 0$$



Invece $\theta = \pi$!!!!

In generale, se P sta nel II o III quadrante la formula restituisce il θ del simmetrico di P rispetto all'origine.

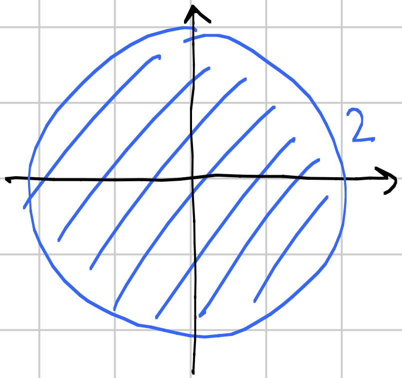


Volendo usare la formula, se P è nel II o III quadrante occorre aggiungere π.

CONSIGLIO: meglio non usare formule, ma guardare il disegno.

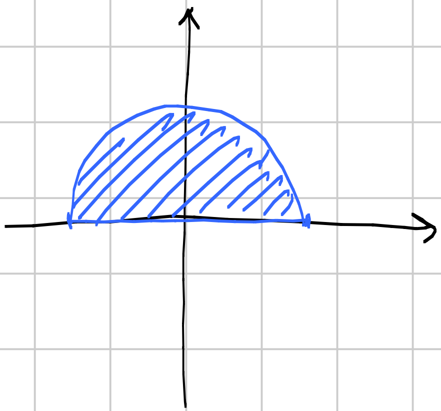
DESCRIZIONE DI INSIEMI DEL PIANO MEDIANTE COORD. POLARI

Esempi



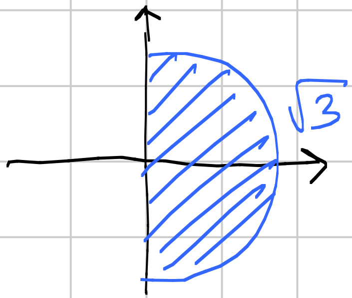
Descr. cart.: $x^2+y^2 \le 4$

Descr. polare: $\rho \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$



Descr. cartesiana: $x^2+y^2 \le 2$, $y \ge 0$

Descr. polare: $\rho \in [0,\sqrt{2}]$, $\theta \in [0,\pi]$

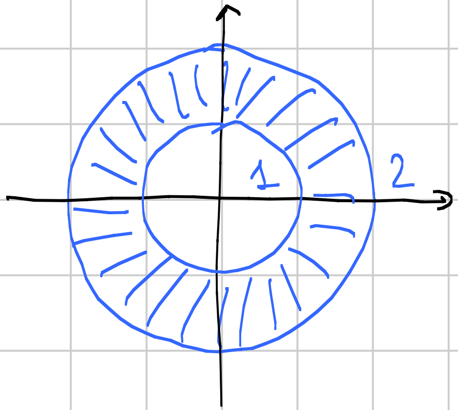


Descr. cartesiana: $x^2+y^2 \le 3$, $x \ge 0$

Descr. polare: $\rho \in [0,\sqrt{3}]$, $\boxed{\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$ NOO OOOO!!

Giusta: $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

oppure $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$

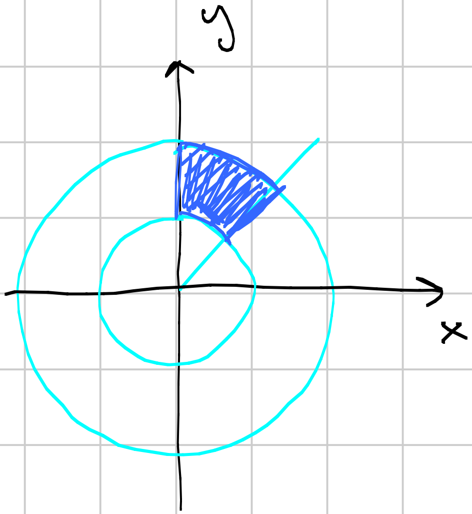


Fuori dal cerchio piccolo

Dentro cerchio grande

Descr. cart.: $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$

Descr. polare: $\rho \in [1,2]$, $\theta \in [0, 2\pi]$

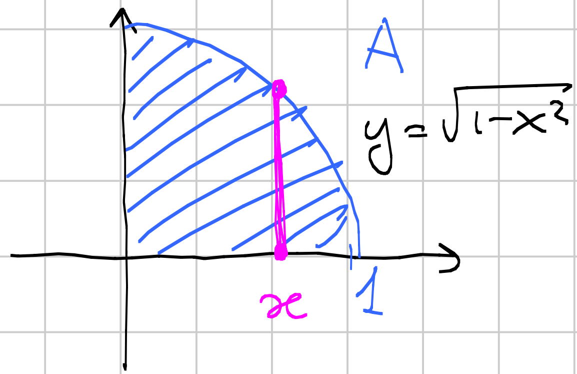


Descr. cartesiana: $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$,

$x \geq 0$, $y \geq x$

Descr. polare: $\rho \in [1,2]$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

INTEGRALI IN COORD POLARI



$$\iint_A x \, dx dy$$

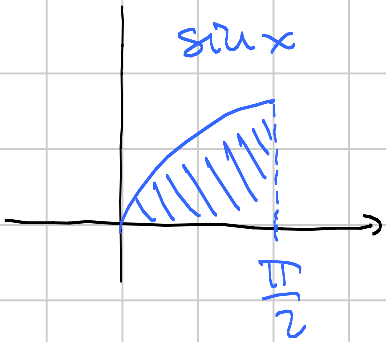
L'insieme A è normale (ad esempio) rispetto all'asse x:

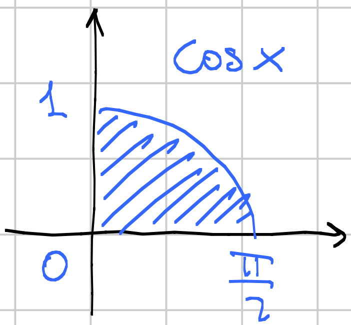
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], \ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \}$$

In alternativa, si possono usare le coord. polari, nelle quali A si descrive come $\rho \in [0,1]$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

$$\iint_A x \, dx dy = \underbrace{\int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta}_{\text{Descrizione di A in coord. polari}} \quad \underbrace{\rho \cos\theta}_{x \text{ in coord. polari}} \cdot \underbrace{\rho}_{\text{pagamento}} =$$

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \; \rho^2 \cdot \cos\theta \; = \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \, d\theta}_{1}$$





Tutti questi valgono 1

$$= \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{1}{3}$$

— o — o —

In generale:

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_B f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\; \rho \; d\rho\, d\theta}$$

Descrizione di A in coord. polari

funzione in coord. polari

pag.

Esempio 2 $\quad A$ = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta}_{\text{A in coord. polari}} \quad \rho^2 \quad \rho$$

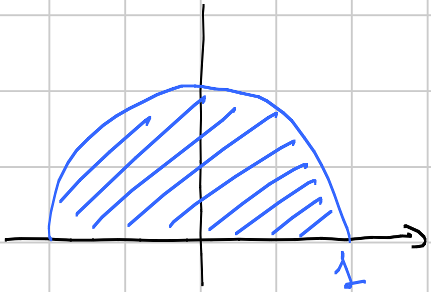
x^2+y^2 in coord. pol. $\qquad$ pag.

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} \rho^3\, d\theta = \int_0^2 \rho^3\, d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3\, d\rho = \dots$$

—o—o—

Esempio 3



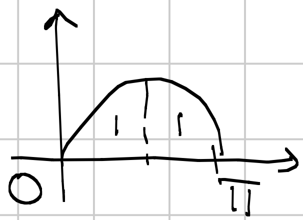
$$\iint_A x\,dx\,dy = 0 \qquad \text{(SIMMETRIA!!!!!)}$$

$$\iint_A y\,dx\,dy = \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\theta \ \underbrace{\rho \sin\theta}_{y} \ \rho$$

pag.

$$= \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{2} = 2 \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \frac{2}{3}.$$

N.B. $$\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = \Big[-\cos\theta\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$



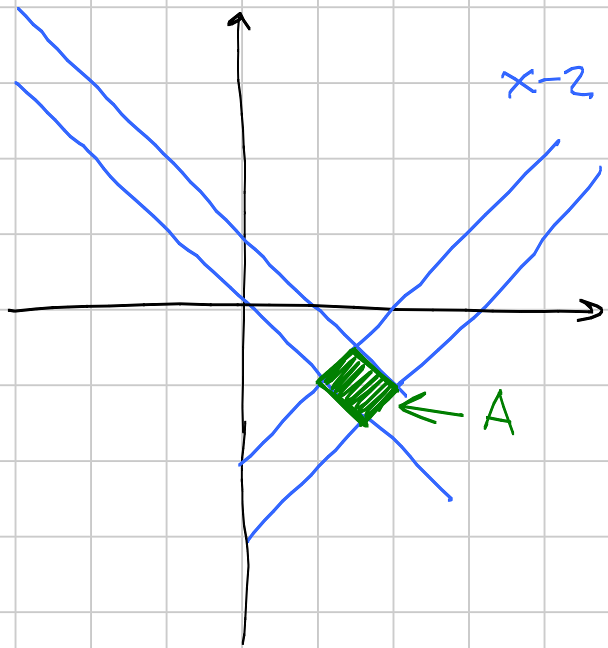
$$= -\cos\pi - (-\cos 0)$$

$$= 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2$$

CAMBI DI VARIABILE PER INT. DOPPI

Esempio $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x+y \le 1 ,\ 2 \le x-y \le 3 \}$

$$\iint_A (x^2-y^2)\, dx\, dy$$



$x+y \ge 0 \rightarrow y \ge -x$

$x+y \le 1 \rightarrow y \le 1-x$

$x-y \le 3 \rightarrow y \ge x-3$

$x-y \ge 2 \rightarrow y \le x-2$

$$0 \le \underbrace{x+y}_{u} \le 1 \qquad 2 \le \underbrace{x-y}_{v} \le 3$$

$$(x^2-y^2) = (x+y)(x-y) = uv$$

$$\iint_A (x^2-y^2)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^1 du \int_2^3 dv}_{\substack{\text{descrizione insieme}\\ \text{A usando le}\\ \text{coord. } u \text{ e } v}} \quad \underbrace{uv}_{\substack{\text{Funzione}\\ x^2-y^2 \text{ nelle}\\ \text{variabili } u \text{ e } v}} \quad \underbrace{\frac{1}{2}}_{\substack{J(u,v)\\ \text{pagamento}}} =$$

Come calcolare il pagamento $J(u,v)$

1. $\boxed{\text{Ricavare } x \text{ e } y}$ (in funzione di u e v)

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases}$$

Sommo: $2x = u+v \Rightarrow$ $x = \dfrac{u+v}{2}$

Sottr.: $2y = u-v \Rightarrow$ $y = \dfrac{u-v}{2}$

2. $\boxed{\text{Costruzione matrice JACOBIANA}}$

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ $\boxed{\text{Determinante JACOBIANO}}$

$$J(u,v) = |\operatorname{Det}(\text{Matrice})|$$

Nell'esempio : $J(u,v) = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$.

Nell'esempio l'integrale è diventato

$$\frac{1}{2} \int_0^1 du \int_2^3 dv \, (uv)$$

—o—o—

La procedura indicata nel caso delle coord. polari diventa:

(1) Ricavare x e y in funzione di ρ e θ:

$$x = \rho \cos\theta \qquad y = \rho \sin\theta$$

(2) Matrice jacobiana:

$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho \cos\theta \end{pmatrix}$$

(3) Det. jacobiano

$$J(\rho,\theta) = \rho \cos^2\theta + \rho \sin^2\theta = \rho(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \rho$$

Esempi importanti di cambio di variabile

1. **Traslazioni** $u = x + a$ $\quad v = y + b$ (a, b numeri)

① $x = u - a, \quad y = v - b$

② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ = Identità

③ $J = |\mathrm{Det}| = 1$

2. **Dilatazioni degli assi** $u = ax \quad v = by$ (a, b numeri $\neq 0$)

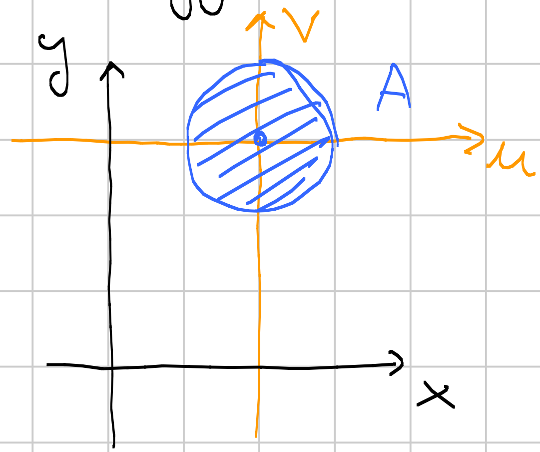
① $x = \frac{u}{a} \qquad y = \frac{v}{b}$

② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$ Matrice DIAGONALE

③ $J = |\mathrm{Det}| = \frac{1}{|ab|}$

Esempio 1 $\quad A$ = cerchio con centro in $(2,3)$ e raggio 1

$$\iint_A x\,dx\,dy \qquad \text{(di sicuro sarà } > 0\text{)}$$



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ \underbrace{(x-2)}_{= u}{}^2 + \underbrace{(y-3)}_{= v}{}^2 \leq 1^2\}$$

Nelle coordinate (u,v) l'equazione del cerchio è $u^2+v^2 \leq 1$

$$\iint_A x\,dx\,dy = \iint_{u^2+v^2\leq 1} (u+2) \quad 1 \quad du\,dv =$$

$u^2+v^2\leq 1$: insieme A nelle coord. u e v

$(u+2)$: x ricavato risp. a u e v

1: J

$$= \iint_{u^2+v^2\leq 1} (u+2)\,du\,dv$$ Per questo posso usare coord. polari

Oppure, più brevemente,

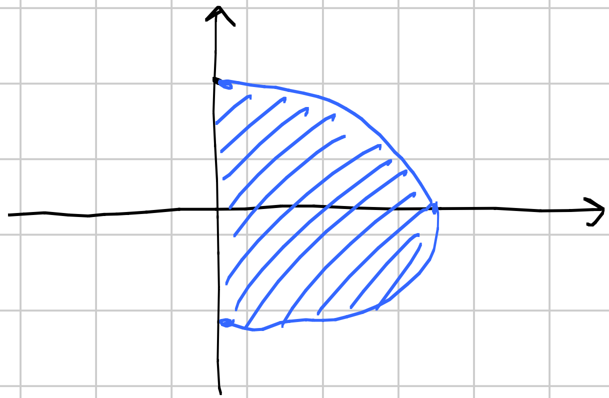
$$= \iint_{u^2+v^2\le 1} u \, du\, dv + \iint_{u^2+v^2\le 1} 2 \, du\, dv = 2\pi$$

$$\underbrace{\iint u\,du\,dv}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{per simmetria}} \qquad \underbrace{\iint 2\,du\,dv}_{\text{2 Area cerchio} \,=\, 2\pi}$$

—o—o—

Esempio 2 $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2+3y^2 \le 1, \ x \ge 0\}$

$$\iint_A y^2 \, dx\, dy \qquad (\text{di sicuro} > 0)$$



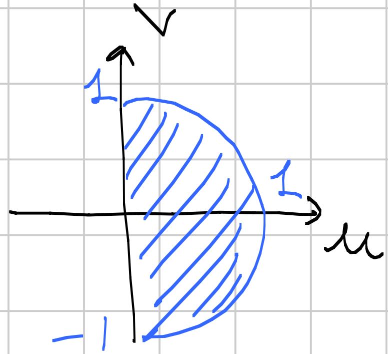
$$2x^2+3y^2 \le 1$$

$$(\underbrace{\sqrt{2}x}_{u})^2 + (\underbrace{\sqrt{3}y}_{v})^2 \le 1$$

Posto $u = \sqrt{2}\, x$, $v = \sqrt{3}\, y$ l'insieme diventa

$u^2 + v^2 \le 1$, $u \ge 0$ $\qquad y = \dfrac{v}{\sqrt{3}}$

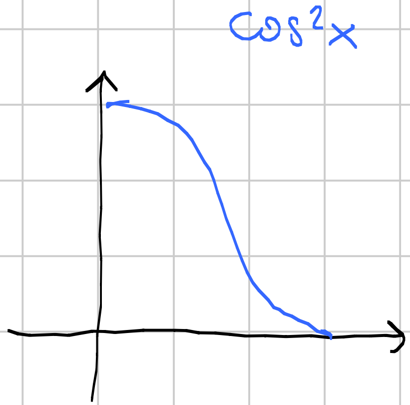
$$\iint_A y^2 \, dx \, dy = \iint_{\substack{u^2+v^2 \le 1 \\ u \ge 0}} \underbrace{\frac{v^2}{3}}_{y^2} \underset{\substack{\uparrow \\ J \text{ calcolato prima}}}{\frac{1}{\sqrt{6}}} \, du \, dv$$



$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \iint_{\substack{u^2+v^2 \le 1 \\ u \ge 0}} v^2 \, du \, dv = (\text{POLARI})$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^1 d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \, \underbrace{\rho^2 \sin^2\theta}_{v^2} \underset{\substack{\uparrow \\ J}}{\rho}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^1 \rho^3 \, d\rho \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \text{si fa}$$



$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \qquad I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx \implies I_1 = I_2$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^{\pi/2} (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/2} 1 \cdot dx = \frac{\pi}{2} \implies I_1 = I_2 = \frac{\pi}{4}$$