Integrali in 2 VARIABILI

1. NOTAZIONI
2. SIGNIFICATO GEOMETRICO
3. "DEFINIZIONI"
4. TECNICHE DI CALCOLO

1. NOTAZIONI

Integrali PROPRI in 2 variabili

2 ingredienti fondamentali

- zona di integrazione: insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ LIMITATO
- integranda: funzione $f: A \to \mathbb{R}$ LIMITATA (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in A$)

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \leftarrow \text{integrale doppio di } f \text{ sull'insieme } A$$

Talvolta si abbrevia con $\int_A f(x,y)\,dx\,dy$

— o — o —

2. SIGNIFICATO GEOMETRICO

$\int_A f(x,y)\,dx\,dy$ = Volume $\boxed{\text{con segno}}$ della parte di spazio compresa tra il grafico di $f(x,y)$ e il piano base xy.

Con segno: le parti in cui $f(x,y) > 0$ contano con il segno $+$, quelle in cui $f(x,y) < 0$ con il segno $-$.

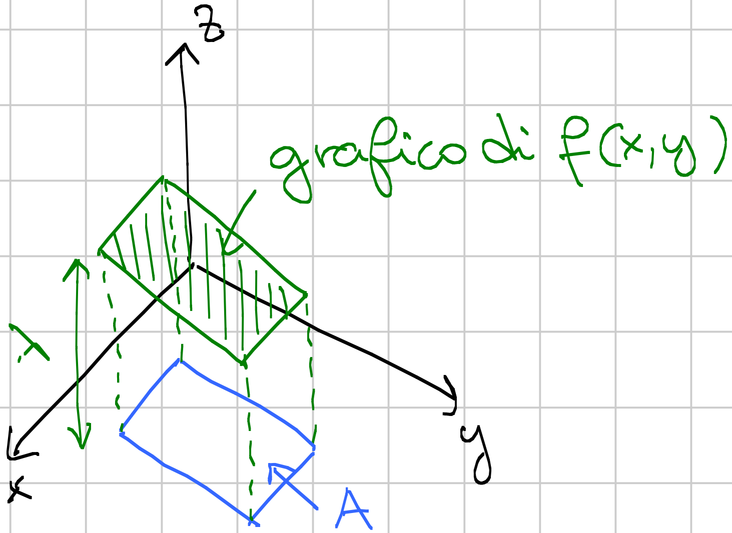
— o — o —

3. IDEA DELLA DEFINIZIONE

<u>Caso banale</u>: A = rettangolo con lati paralleli agli assi

$$A = [a,b] \times [c,d]$$

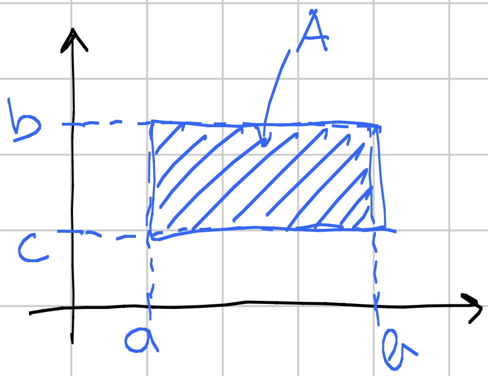
$$f(x,y) = \text{costante } \lambda \text{ su tutto } A$$



$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \text{volume con segno di un parallelepipedo}$$

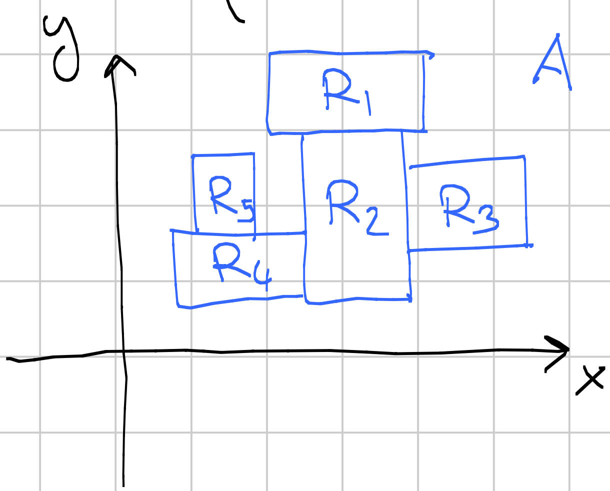
$$= \lambda \cdot \text{Area base} = \lambda \cdot (b-a)(d-c)$$

da questo dipende il segno



Caso semibanale : FUNZIONI A GRADINO (step functions)

A = unione finita di rettangoli $R_1, \dots, R_n$ con lati // agli assi (che si possono intersecare solo sul bordo)



$f(x,y)$ = costante λ_i su ogni rettangolo R_i

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = somma algebrica del volume con segno dei vari parallelepipedi

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \text{Area}(R_i)$$

altezza i-esimo "grattacielo"

Area base

Caso generale : A = insieme limitato qualunque
$f(x,y)$ = funzione limitata qualunque.

Si definisce l'INTEGRALE SUPERIORE $I^+(f;A)$ come

$$I^+(f;A) = \inf \left\{ \iint \varphi(x,y)\,dx\,dy \ : \ \varphi(x,y) \text{ è una qualunque funzione a gradini t.c. } \varphi(x,y) \geq f(x,y) \text{ per ogni } (x,y) \in A \right\}$$

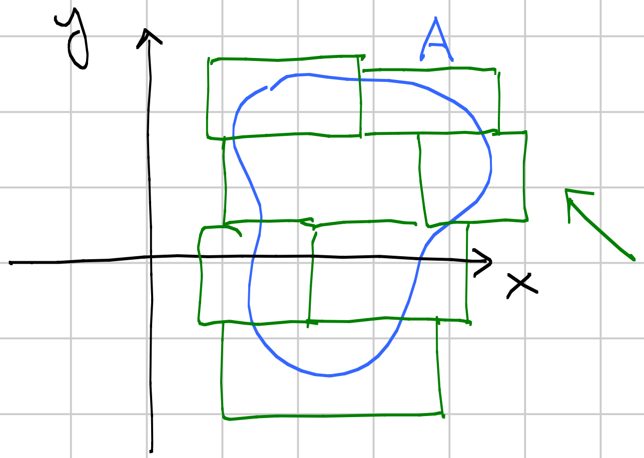
Nella zona in cui è definita $\varphi(x,y)$

Analogamente si definisce l'integrale inferiore

$$I^-(f;A) = \sup \left\{ \iint \varphi(x,y)\,dx\,dy \ : \ \varphi(x,y) \text{ è } \dots \text{ t.c. } \varphi(x,y) \leq f(x,y) \text{ per ogni } (x,y) \in A \right\}$$

come sopra

Come deve essere fatta la zona in cui è definita φ ?



Supponiamo $f(x,y) > 0$ in A.

possibile insieme di definizione di una funzione a gradini $\varphi(x,y)$ che sia $\geq f(x,y)$ in A.

Problema simile si ha con funzioni a gradino $\leq f(x,y)$ in A.

Differenza tra caso 1-dim. e 2-dim: le funzioni a gradino non sforano solo in altezza, ma anche in larghezza.

In generale si ha che SEMPRE $I^{+}(f;A) \geq I^{-}(f;A)$. Se sono uguali si dice che $f(x,y)$ è integrabile (secondo RIEMANN) in A e il valore comune è l'INTEGRALE

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy.$$

Tutte le funzioni continue (e non solo) sono integrabili.

Aver supposto A ed $f(x,y)$ limitati assicura l'esistenza di funzioni a gradino $\geq f$ e $\leq f$.

— o — o —

4. TECNICHE DI CALCOLO

"Un integrale in dim 2 = 2 integrali in dim. 1"

FORMULA DI RIDUZIONE SUI RETTANGOLI

A = rettangolo con lati // agli assi : $A = \underset{x\in}{[a,b]} \times \underset{y\in}{[c,d]}$

$f(x,y)$ = funzione limitata qualunque

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\; f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\; f(x,y)}$$

Esempio 1 $\quad A = [0,1] \times [0,2] \qquad f(x,y) = x^2 y$

$$\iint_A x^2 y \, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \; x^2 y = \int_0^1 dx \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} =$$

primitiva di x^2y rispetto alla variabile y

$$= \int_0^1 dx \left\{ \underbrace{x^2 \cdot \frac{4}{2}}_{y=2} - \underbrace{0}_{y=0} \right\} = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3}$$

In alternativa:

primitiva di x^2y risp. a x

$$\iint_A x^2 y \, dx\, dy = \int_0^2 dy \int_0^1 dx \; x^2 y = \int_0^2 dy \left[\frac{x^3}{3} y \right]_{x=0}^{x=1} =$$

$$= \int_0^2 dy \left\{ \underbrace{\frac{y}{3}}_{x=1} - \underbrace{0}_{x=0} \right\} = \frac{1}{3} \int_0^2 y\, dy = \frac{1}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{2}{3}$$

Più comodamente

$$\iint_A x^2 y \, dx\, dy = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \, x^2 y = \int_0^1 x^2 dx \int_0^2 y \, dy =$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \underbrace{\left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2}}_{2} = 2 \int_0^1 x^2 \, dx$$

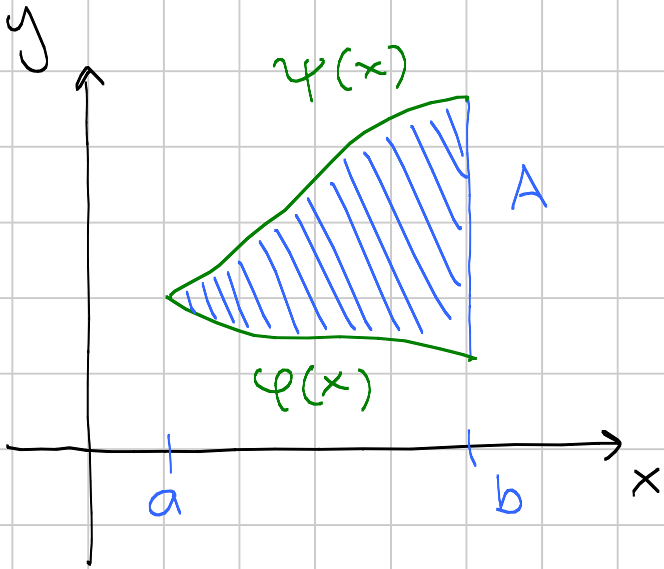
$$= 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} .$$

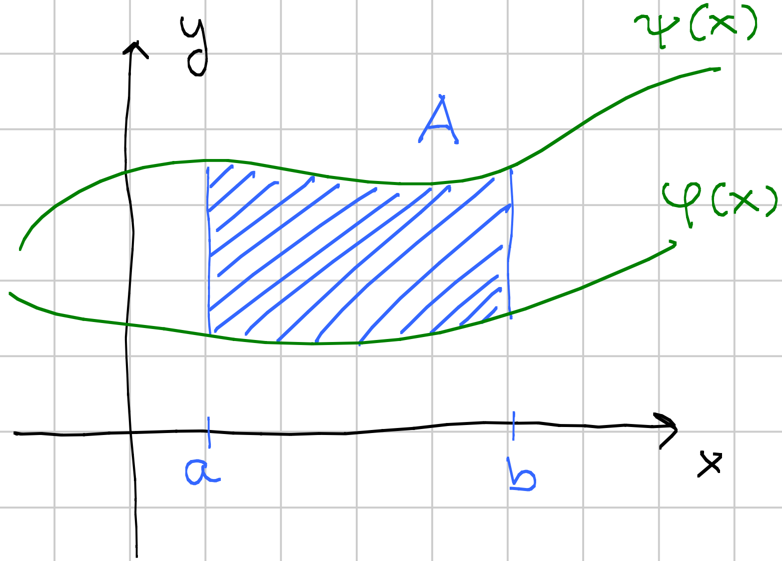
INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE x

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dica norm. risp. asse x se è della forma

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in \underbrace{[a,b]}_{\text{intervallo dato}},\ \varphi(x) \le y \le \psi(x) \}$$

funzioni date





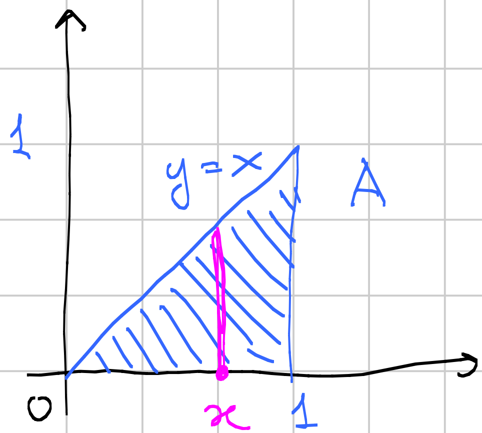
FORMULA DI RIDUZIONE su insiemi normali rispetto asse x

A = ins. norm. asse x   f(x,y) = funzione limitata qualunque

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \; f(x,y)}$$

Esempio 1

$$\iint_A xy\,dx\,dy$$



Scriviamo A come insieme norm. risp. asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ x \in [0,1],\ 0 \le y \le x\}$$

$$\iint_A xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x dy\; xy = \int_0^1 x\,dx \int_0^x y\,dy =$$

$$= \int_0^1 x\,dx \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} = \int_0^1 x\,dx \left\{ \frac{x^2}{2} - 0 \right\} =$$

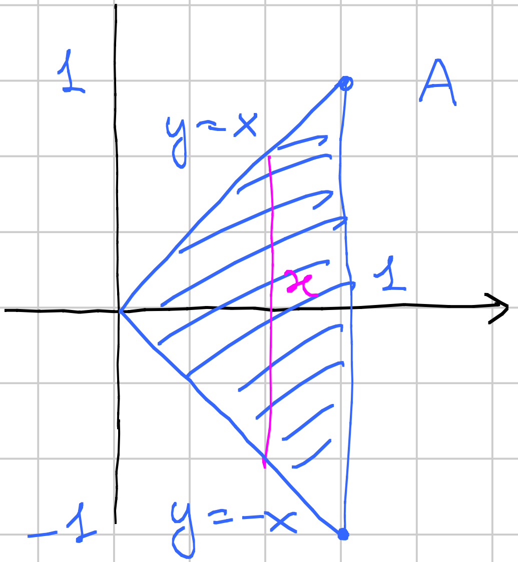
primitiva di y risp. a y — $y=x$ — $y=0$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{8}.$$

— o — o —

Esempio 2

$$\iint_A x^2\,dx\,dy =$$



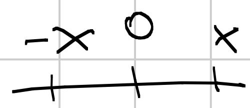
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], -x \le y \le x \}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} dy \; x^2 = \int_0^1 x^2\,dx \int_{-x}^{x} dy$$

$$= \int_0^1 x^2 dx \, [\, y \,]_{y=-x}^{y=x} = \int_0^1 x^2 \left\{ \underbrace{x}_{y=x} - \underbrace{(-x)}_{y=-x} \right\} dx =$$

$$= 2 \int_0^1 x^3 \, dx = 2 \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} .$$

In generale $\displaystyle\int_a^b dx = b-a =$ lunghezza intervallo



$$\int_{-x}^{x} dy = \text{lungh. intervallo } [-x, x] = 2x$$

Analogamente: $\displaystyle\iint_A dx\,dy = \iint_A 1 \, dx\,dy = \text{Area}(A)$

Si può usare per calcolare l'area di A

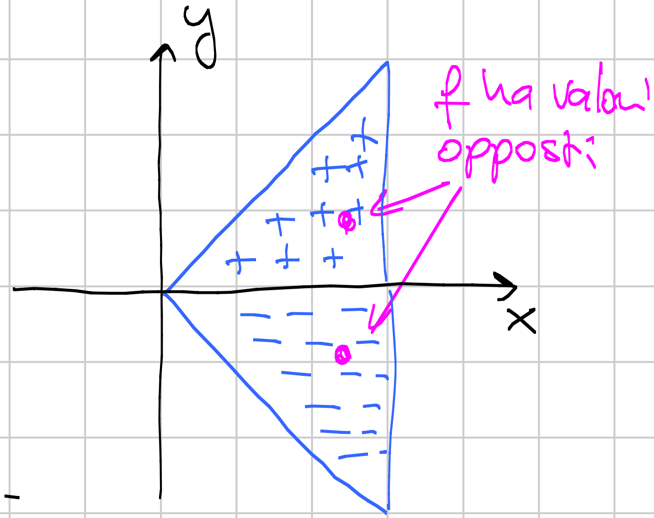
Esempio 3

$A =$ come esempio precedente

$$\iint_A y\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} dy\, y = \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x}^{y=x} =$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{y=x} - \underbrace{\frac{(-x)^2}{2}}_{y=-x} \right\} \left[= \int_0^1 0\,dx \right] = 0$$

Potevamo scrivere 0 direttamente?



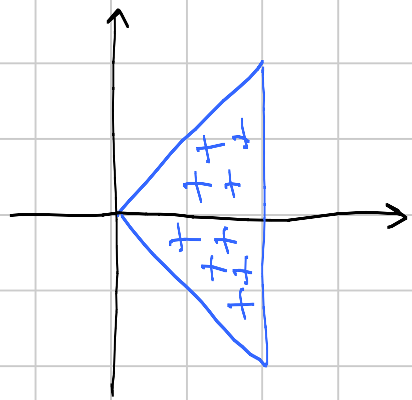
$\iint_A y\,dx\,dy =$ volume positivo nella parte +++
sommato ad un volume negativo uguale nella parte ---

$= 0$

Rigorosamente:
- $f(x,-y) = -f(x,y)$
- insieme simm. rispetto alla trasf $(x,y) \to (x,-y)$

Esempio 4 $\quad A =$ solito $\qquad \iint_A x\,dx\,dy > 0$

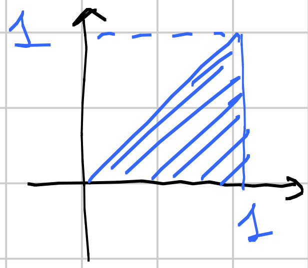
perché sto integrando una funzione > 0



$$\iint_A x\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} dy\; x = \int_0^1 x\,dx \underbrace{\int_{-x}^{x} dy}_{2x \,=\, \text{lungh. interv.}} =$$

$$= 2\int_0^1 x^2\,dx = \frac{2}{3}.$$

Esempio 5 $\qquad \iint_A x\,dx\,dy = \frac{1}{3}$



A

$$\iint_{\text{◢}} x\,dx\,dy = \iint_{\text{◥}} x\,dx\,dy$$

Esempio 6 $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 1-x^2\}$ Non è ancora una scrittura come insieme normale

$$\iint_A y \, dx\,dy = \quad \text{(di sicuro sarà } > 0\text{)}$$

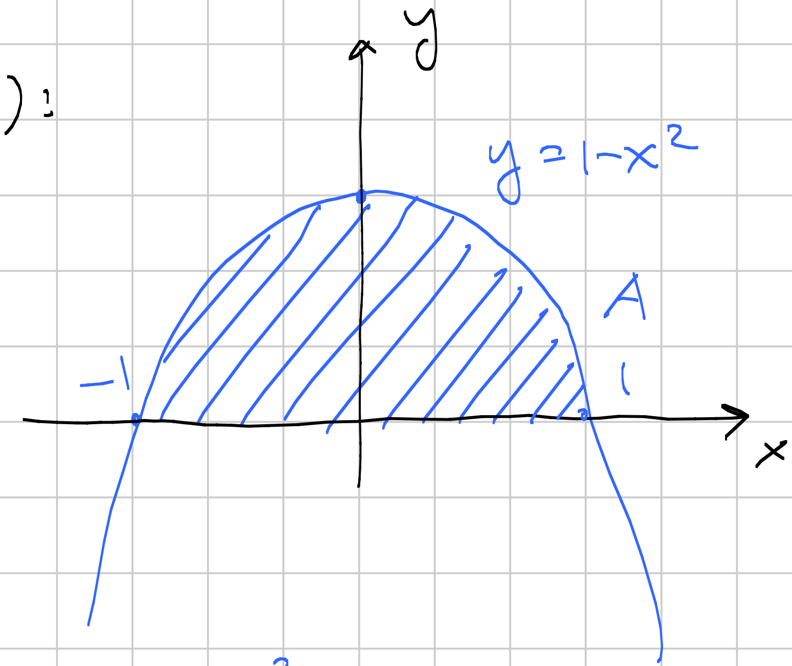
Scrivo A come insieme normale (asse x):

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1], \ 0 \le y \le 1-x^2\}$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \int_0^{1-x^2} dy \ y = \int_{-1}^{1} dx \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (1-2x^2+x^4)\, dx$$

$$= \ldots$$

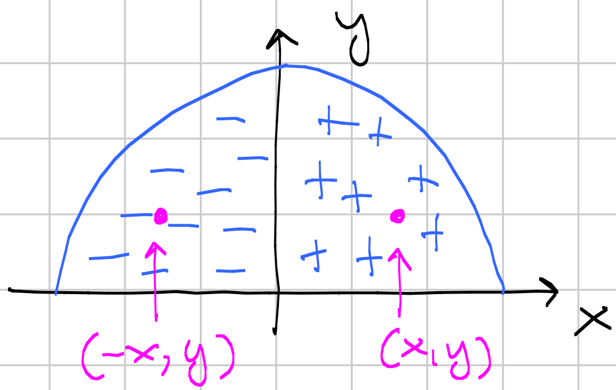


$1-x^2=0$

$x^2=1 \Rightarrow x = \pm 1$

Esempio 7

A = come esempio 6



$$\iint_A x\,dx\,dy = 0$$

dispari risp. variabile x

Rigoroso: $\nearrow$ $f(-x,y) = -f(x,y)$

$\searrow$ l'insieme A è simmetrico rispetto alla trasformazione $(x,y) \to (-x,y)$

Esempio 8

A = come 6 e 7

$$\iint_A |x|\,dx\,dy = 2\iint_{AD} x\,dx\,dy = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} dy\; x =$$

per simmetria

parte destra di A

$$= 2\int_0^1 x\,dx \underbrace{\int_0^{1-x^2} dy}_{1-x^2 = \text{lungh. interv.}} =$$

$$= 2\int_0^1 x(1-x^2)\,dx = 2\int_0^1 (x-x^3)\,dx = \ldots$$

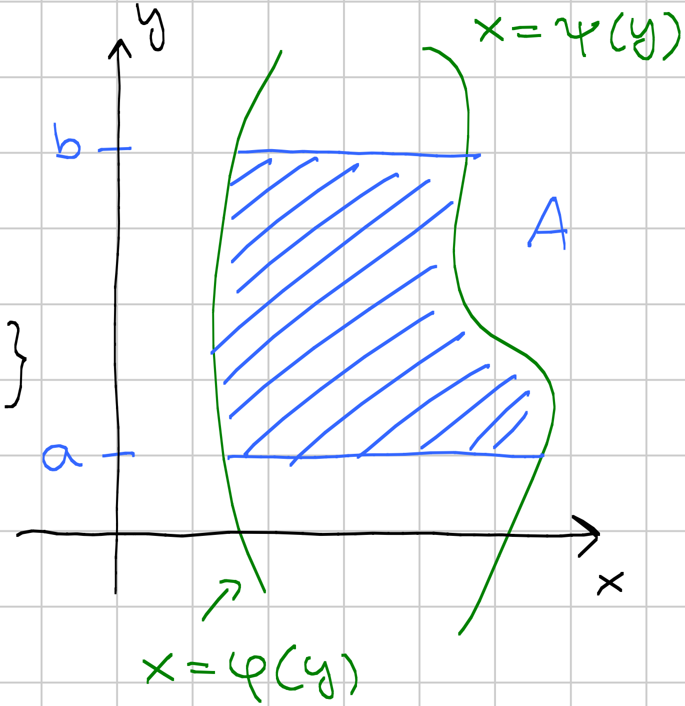
MAT I TLC

ORA 80

INSIEMI NORMALI RISPETTO ASSE y

Un insieme si dice normale risp. all'asse y se è della forma

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ y \in [a,b], \ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \}$$

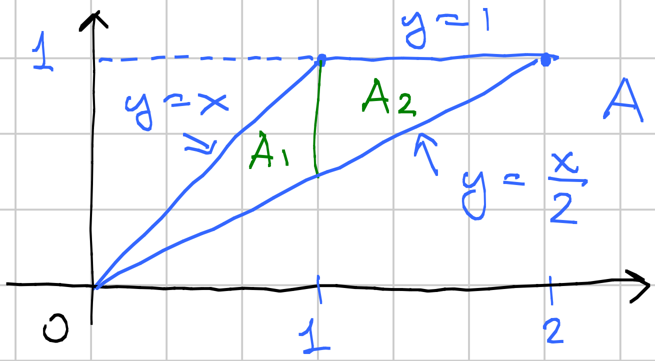


Per tali insiemi vale la seguente

FORMULA DI RIDUZIONE

$$\boxed{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx \ f(x,y)}$$

Esempio 1

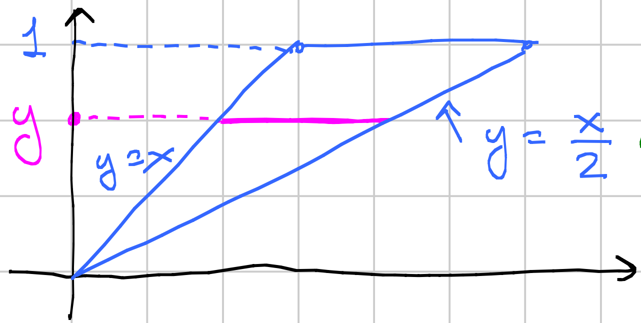


$$\iint_A x\,dx\,dy = \iint_{A_1} x\,dx\,dy + \iint_{A_2} x\,dx\,dy$$

A_1 e A_2 sono normali risp. asse x

$$= \underbrace{\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} dy\ x}_{\text{integr. su } A_1} + \underbrace{\int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1} dy\ x}_{\text{integr. su } A_2} = \dots \quad \text{così viene}$$

In alternativa si può vedere A come insieme normale risp. asse y



leggo nella forma $x = 2y$

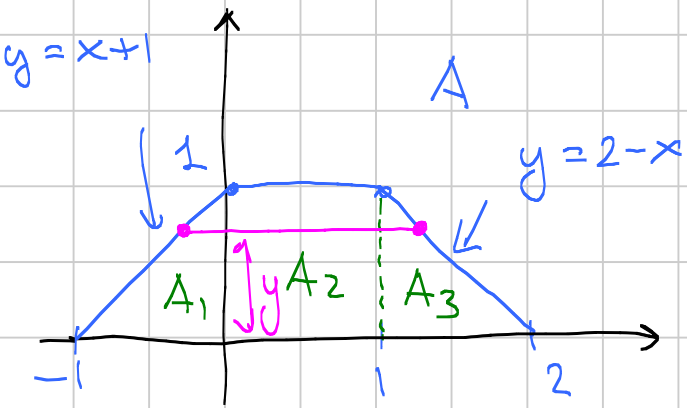
$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0,1], \quad y \le x \le 2y \}$$

$$\iint_A x \, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \ x = \int_0^1 dy \underbrace{\left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y}^{x=2y}}_{\text{prim. risp. a } x} =$$

$$= \int_0^1 dy \left\{ \underbrace{2y^2}_{x=2y} - \underbrace{\frac{y^2}{2}}_{x=y} \right\} = \frac{3}{2} \int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{2}$$

<u>Esempio 2</u>

$$\iint_A y \, dx\, dy \quad (>0 \text{ già sappiamo})$$



$$= \underbrace{\int_{-1}^{0} dx \int_0^{x+1} dy \ y}_{\text{su } A_1} + \underbrace{\int_0^1 dx \int_0^1 dy \ y}_{\text{su } A_2} + \underbrace{\int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \ y}_{\text{su } A_3}$$

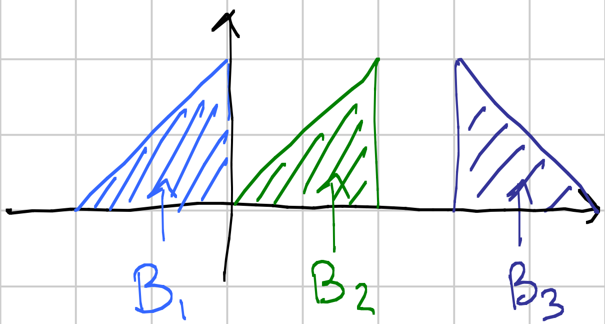
Visto rispetto all'asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0,1], \quad y-1 \le x \le 2-y \}$$

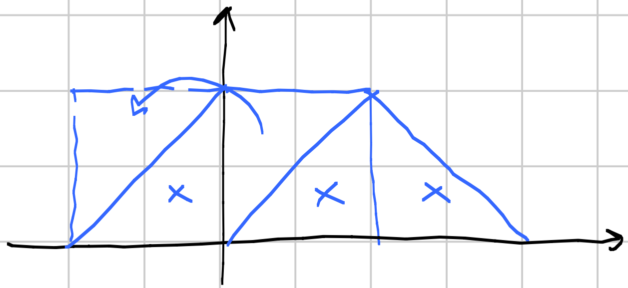
$$\iint_A y \, dx\, dy = \int_0^1 dy \int_{y-1}^{2-y} dx \cdot y = \int_0^1 y \, dy \underbrace{\int_{y-1}^{2-y} dx}_{\substack{\text{lungh. interv.} = \\ 2-y-(y-1) = \\ 3-2y}}$$

$$= \int_0^1 y(3-2y)\, dy = \text{facile.}$$

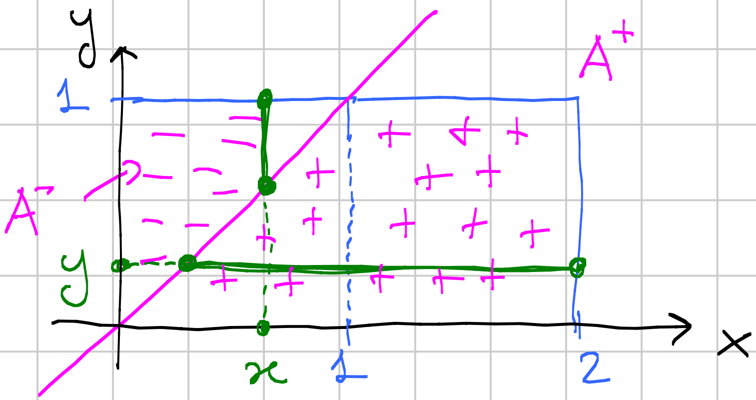
— o — o —



$$\iint_{B_1} y\, dx\, dy = \iint_{B_2} y\, dx\, dy = \iint_{B_3} y\, dx\, dy$$



Esempio 3 $A = [0,2] \times [0,1]$ $f(x,y) = |x-y|$



Considero il segno di $x-y$

$x-y \geq 0 \iff y \leq x$

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{in } A^+ \\ y-x & \text{in } A^- \end{cases}$$

$$\iint_A |x-y| \, dx\, dy = \iint_{A^+} (x-y) \, dx\, dy + \iint_{A^-} (y-x) \, dx\, dy =$$

$$A^- = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], \quad x \leq y \leq 1 \}$$

norm. asse x

$$A^+ = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [0,1], \quad y \leq x \leq 2 \}$$

norm. asse y

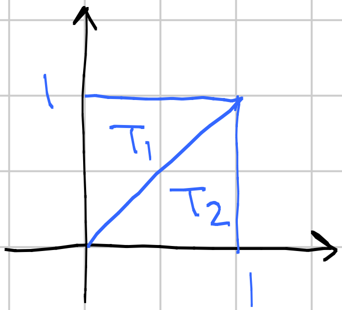
$$= \int_0^1 dy \int_y^2 dx \, (x-y) + \int_0^1 dx \int_x^1 dy \, (y-x)$$

$$= \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=y}^{x=2} + \int_0^1 dx \left[\frac{y^2}{2} - xy \right]_{y=x}^{y=1} = \text{viene}$$

prim. risp. a x

prim. risp. a y

__Osservazione__

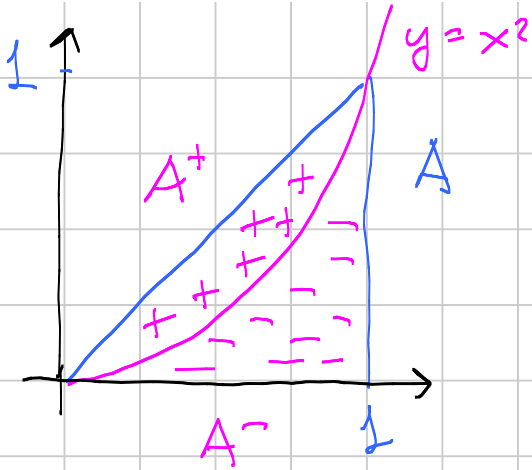


$$\iint_{T_1} |x-y| \, dx \, dy = \iint_{T_2} |x-y| \, dx \, dy$$

Esempio 4

$$\iint_A |y-x^2| \, dx\, dy =$$

$$y - x^2 \geq 0 \iff y \geq x^2$$



$$= \iint_{A^+} (y-x^2)\, dx\, dy + \iint_{A^-} (x^2-y)\, dx\, dy$$

$$= \iint_{A^+} (y-x^2)\, dx\, dy - \iint_{A^-} (y-x^2)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} dy\, (y-x^2) - \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\, (y-x^2) = \text{conti} \ldots$$