MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 76}}$

Titolo nota 05/12/2006

Integrali impropri

Definizioni nel caso di int. monoproblema (lim. ...)

Spezzamento degli integrali con + problemi

<u>Tabellina</u>:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \nearrow \text{ conv. se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{ Div. a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^\alpha} \longrightarrow \text{come sopra}$$

$$\int_0^{1} \frac{dx}{x^\alpha} \begin{cases} \nearrow \text{ conv. se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{ Div. a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Integranda segno costante (positivo)
- ↗ Criterio confronto
- ↘ Criterio confronto asintotico
  - ↗ casi standard
  - ↘ Casi limite

Int. segno variabile
- → Assoluta integrabilità
- ↘ Trucco integr. per parti

Utilità dei criteri: stabilire se un integrale converge o no senza dover fare la primitiva

Utilità dell'integranda positiva:

l'integrale può solo
- ↗ convergere
- ↘ divergere a $+\infty$

$\boxed{\text{CRITERIO CONFRONTO ASINTOTICO}}$ Siano

$$\int_E f(x)\,dx \qquad e \qquad \int_E g(x)\,dx$$

due integrali impropri. Supponiamo che $f(x) \geq 0$ in E e $g(x) > 0$ in E.

Supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

punto in cui gli integrali hanno il problema

Allora i due integrali con problema in x_0 si comportano allo stesso modo

Esempio 1 $\displaystyle\int_5^{+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{x^2+3x+2}{x^4+4x+1}}}_{f(x)}\, dx$ $\quad f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione

Brutale: $f(x) \underset{x \text{ grande}}{\sim} \dfrac{x^2}{x^4} = \dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow$ l'int. dato si comporta come $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con pb. all'∞ e questo converge

Rigoroso: faccio C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Devo fare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot f(x) = 1 \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix} \Rightarrow \ldots$$

Esempio 2 $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\arctan x}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\arctan x} > 0$ nella zona di integr.

problemi in $x=0$

Brutale $\quad \dfrac{1}{\arctan x} \sim \dfrac{1}{x}$ $\quad$ dunque l'int. dato si comporta come $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$ con pb. in 0

per $x \sim 0$

$\Rightarrow$ DIVERGE

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Devo fare

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\arctan x} = 1 \quad \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq +\infty \end{matrix}$$

Esempio 3 $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \underbrace{\int_0^4 \frac{dx}{x^2}}_{\text{DIVERGE}} + \underbrace{\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x^2}}_{\text{CONV.}} = +\infty$

Esempio 4 $\quad \displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2+1}{x^4+1}}_{f(x)}\,dx$

$\boxed{\text{Brutale: } f(x) \sim \dfrac{1}{x^2}, \text{ quindi } \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx \text{ si comp. come}}$

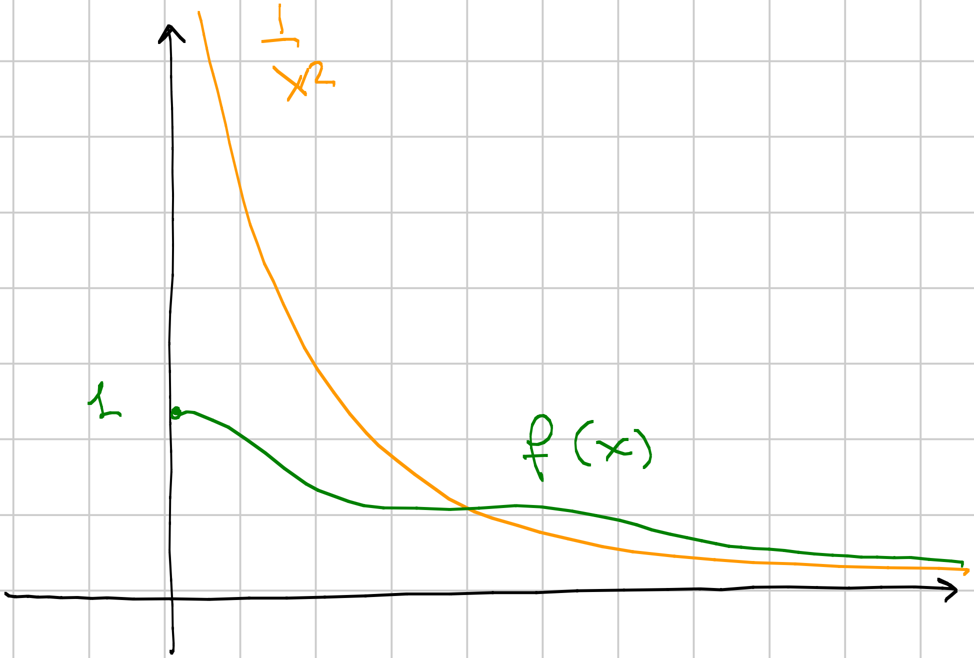
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad \text{dunque DIVERGE}}$$

NOOOO !!!!!!

Brutale corretto: $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$, quindi $\int f(x)\,dx$ con problema a $+\infty$

per x grandi

si comporta come $\int \frac{1}{x^2}\,dx$ con problema a $+\infty$, quindi CONVERGE



Esempio 5 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{x^2-1}{x^4+1}}_{f(x)}\,dx$

Non è + vero che $f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione

In questo caso $f(x) \geq 0$ per x "vicini al problema" dunque posso ugualmente applicare il criterio.

$$\int_0^{+\infty} = \int_0^{22} + \int_{22}^{+\infty}$$

integrale PROPRIO, senza problemi

Qui $f(x) \geq 0$ quindi applico criterio

Esempio 6 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2}}_{f(x)\geq 0}\,dx = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ CONVERGE

CONV CONV

$$\frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2} \le \frac{10}{x^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{10}{x^2}\,dx \text{ converge } \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x\sqrt{x})}{x^2}\,dx \text{ converge}$$

$\uparrow$ CONFRONTO

In alternativa : C.A. con $g(x) = \frac{1}{x^2}$ (Provare ...)

Brutale : $f(x) \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\uparrow$ per $x \sim 0$

quindi $\int f(x)$ con pb. in 0 si comporta come $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ con problema in 0, quindi CONVERGE.

Rigoroso : C.A. con $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ... $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1 \Rightarrow$ ...

Esempio 7 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}} = \int_0^1 + \int_1^{+\infty}$ CONVERGE

$f(x) \sim \frac{1}{x^3}$ $\Rightarrow \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\,dx$

x grandi

con pb. a $+\infty$ $\Rightarrow$ CONVERGE

$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\Rightarrow \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

per $x \sim 0$

con pb. a 0 $\Rightarrow$ CONVERGE

Es.: fare limiti rigorosi

$\boxed{\text{CASI LIMITE}}$ Nelle stesse ipotesi di prima supponiamo che

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

[Allora $\frac{f(x)}{g(x)} \le 1$ per x vicino ad x_0 $\Rightarrow$ $f(x) \le g(x)$ vicino ad x_0 $\Rightarrow$]

$$\int_E g(x)\,dx \text{ con pb. in } x_0 \text{ CONV} \Rightarrow$$

$$\int_E f(x)\,dx \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{CONV.}$$

Supponiamo invece che $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

[$\Rightarrow$ $\frac{f(x)}{g(x)} \ge 1$ vicino a x_0 $\Rightarrow$ $f(x) \ge g(x)$ vicino a x_0 $\Rightarrow$]

$$\int_E g(x)\,dx = +\infty \quad \Rightarrow \quad \int_E f(x)\,dx = +\infty$$

con pb. in x_0 $\qquad$ con pb. in x_0

Esempio 8 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \underbrace{\frac{\log x}{x\sqrt{x}}}_{f(x)}\, dx$

$f(x)$ non è ≥ 0 in tutta la zona di integr., ma lo è per x abbastanza grande
$\Rightarrow$ posso applicare i criteri

Facciamo C.A. con $\frac{1}{x^{\alpha}}$ facendo in modo che $\alpha > 1$, ma $\alpha < \frac{3}{2}$

$1 \quad \underset{\uparrow\,\alpha}{\frac{5}{4}} \quad \frac{3}{2}$

Prendo $g(x) = \dfrac{1}{x^{5/4}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{3/2}} \cdot x^{5/4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^{1/4}} = 0$$

$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$ per x grandi $\quad \int g(x)\,dx$ conv. (con pb. a $+\infty$)

$\Rightarrow$ int. dato CONV.

MAT I TLC

ORA 77

CRITERIO ASSOLUTA INTEGRABILITÀ

$$\int_E |f(x)|\,dx \text{ CONV.} \Rightarrow \int_E f(x)\,dx \text{ CONV.}$$

$$\int_E |f(x)|\,dx = +\infty \Rightarrow \text{BOH}$$

A questo si possono applicare i criteri precedenti

<u>Dim.</u>

$$f(x) = f(x) - |f(x)| + |f(x)|$$

$$= |f(x)| - \big(|f(x)| - f(x)\big)$$

$$\int_E f(x)\,dx = \underbrace{\int_E |f(x)|\,dx}_{\text{conv. per ipotesi}} - \underbrace{\int_E \big(|f(x)| - f(x)\big)\,dx}_{\text{converge per confr.}} = \text{CONV.}$$

$$0 \le |f(x)| - f(x) \le 2|f(x)|$$

$\int_E 2|f(x)|\,dx$ conv. per ipotesi $\overset{\text{per confronto}}{\Longrightarrow}$ $\int_E (|f(x)| - f(x))\,dx$ conv.

Stessa dimostrazione funziona per le serie

—o—o—

Esempio 1 $\displaystyle\int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{f(x)}\,dx$ $\qquad f(x)$ ha segno variabile VERAMENTE

Considero $\displaystyle\int_2^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^2}\right| dx = \int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$

$\displaystyle 0 \le \frac{|\sin x|}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ $\qquad \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ conv. $\overset{\text{confronto}}{\Longrightarrow}$ $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2}\,dx$ conv.

$\Downarrow$ ← Assol. int.

$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ conv.

Esempio 2

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\arctan(3x) - 3\sin x}{x^{7/2}}}_{f(x) \text{ a segno variabile}} \, dx = \underbrace{\int_0^1}_{\text{CONV.}} + \underbrace{\int_1^{+\infty}}_{\text{conv.}} \Rightarrow \text{CONV.}$$

Considero $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(x)| \, dx$

$$|f(x)| \leq \frac{10}{x^{7/2}} \Rightarrow \int \frac{10}{x^{7/2}} \, dx \text{ con pb. a } +\infty \text{ conv.}$$

$\Downarrow \leftarrow$ confronto

$\displaystyle\int |f(x)| \, dx$ con pb. a $+\infty$ conv.

$\Downarrow \leftarrow$ Assol. conv.

$\displaystyle\int f(x) \, dx$ con pb. a $+\infty$ conv.

Considero il problema in $x = 0$

Brutale:

$$f(x) \sim \frac{3x - 3x}{x^{7/2}} = 0$$

No! Ci siamo fermati troppo presto!

$$f(x) \underset{\text{per } x \sim 0}{\sim} \frac{3x - \frac{(3x)^3}{3} - 3\left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^{7/2}} = \frac{\cancel{3x} - 9x^3 - \cancel{3x} + \frac{x^3}{2}}{x^{7/2}}$$

$$= \frac{-8.5\,x^3}{x^{7/2}} = -\frac{8.5}{\sqrt{x}}$$

Dallo studio fatto segue che Num $\sim -8.5\,x^3$ per $x \sim 0$

Per $x \sim 0$ il numeratore è negativo $\Rightarrow$ segno costante $\Rightarrow$ porto il $-$ fuori e applico i criteri

$\Rightarrow$ si comporta (l'integrale fra 0 e 1) come $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ con problema in 0 $\Rightarrow$ converge

E se il problema non è in $x=0$ oppure $x=+\infty$?

$$\int_1^3 \frac{dx}{x-1} =$$ Pongo $y=x-1 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=1 \Rightarrow dy=dx$

problema in $x=1$

Come cambiano gli estremi ?

Quando $x=1$ ho che $y=0$

Quando $x=3$ ho che $y=2$

$$= \int_0^2 \frac{dy}{y}$$ ← Questo ha problemi in $y=0$ e diverge

+ in generale : $$\int_a^{a+1} \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$$ con cambio di variabili si riduce a

problema in $x=a$

$$\int_0^1 \frac{dy}{y^\alpha},$$ quindi

↗ converge se $\alpha>1$

↘ diverge a $+\infty$ se $\alpha \le 1$

Stessa cosa per $\displaystyle\int_{a-1}^{a} \frac{1}{(a-x)^\alpha}\,dx$

Esempio 1 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x-1)}}$

COLPEVOLE DEL FATTO CHE L'INT. È IMPROPRIO

Brutale: $f(x) \sim \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{(x-1)^{1/2}}$

per $x \sim 1$

$\Rightarrow$ L'int. dato si comporta come

$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$ con pb. in 1, dunque converge

Rigoroso: C.A. con $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$. Devo fare

$$\lim_{x\to1^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{(x+1)\cancel{(x-1)}}}\cancel{\sqrt{x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \begin{matrix}\neq 0\\ \neq +\infty\end{matrix}$$

PROBL.

$\Rightarrow$ stesso comp.

Esempio 2 $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\log x} =$ problema in $x=1$

Pongo $y = x-1 \Rightarrow dy = dx$

Quando $x=1$ ho che $y=0$

" $x=2$ " $y=1$

$$= \int_0^1 \frac{dy}{\log(1+y)}$$ $\leftarrow$ problema in $y=0$

Brutale: $\displaystyle\frac{1}{\log(1+y)} \underset{\text{per } y \sim 0}{\sim} \frac{1}{y} \Rightarrow$ l'integrale diverge

Esempio 3 $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}} = \int_0^1 + \int_1^5 + \int_5^{+\infty} = +\infty$$

problemi in $x=1$ e $x=+\infty$

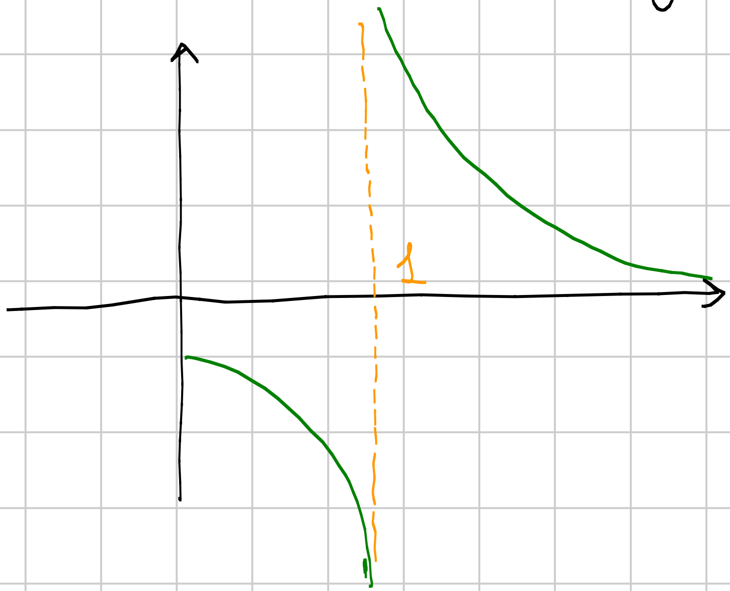
CONV. CONV. DIV. A $+\infty$

$f(x) \underset{x \text{ grandi}}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^3}} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \displaystyle\int_5^{+\infty} f(x)\,dx$ DIV. A $+\infty$

Se fosse $f(x) \geq 0$ sempre potrei concludere che il tutto diverge

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)(x^2+x+1)}}$

COLPEVOLE INNOCENTE



$f(x) \underset{\text{per } x \sim 1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ Allora

$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$ si comporta come $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} \Rightarrow$ CONVERGE

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ CONV. per lo stesso motivo