MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA74}}$

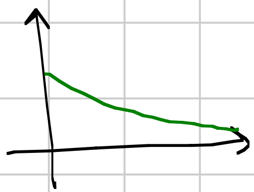
Titolo nota 30/11/2006

INTEGRALI IMPROPRI

INTEGRALI PROPRI
- ↗ zona di integrazione : $[a, b]$ limitato
- ↘ integranda $f(x)$ funzione limitata

Un integrale si dice IMPROPRIO se una o entrambe le richieste non sono soddisfatte.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$



FUNZ. LIM.
ZONA INT. NO

ZONA INT. LIM.
FUNZIONE NO

ENTRAMBI I PROBLEMI

INT. IMPROPRI MONOPROBLEMA = con un problema solo di questo tipo

* FUNZIONE LIMITATA, ZONA DI INTEGRAZIONE = SEMIRETTA $[a,+\infty)$ oppure $(-\infty, a]$

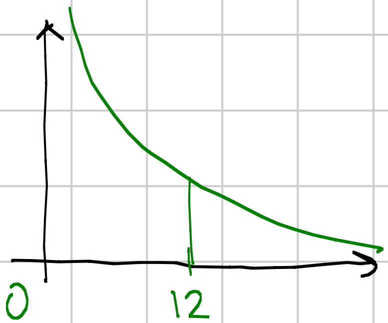
* ZONA INT = interv. $[a,b]$, funzione non limitata vicino all'estremo a o all'estremo b.

Se l'integrale ha tanti problemi, occorre spezzarlo in tanti integrali con un problema solo

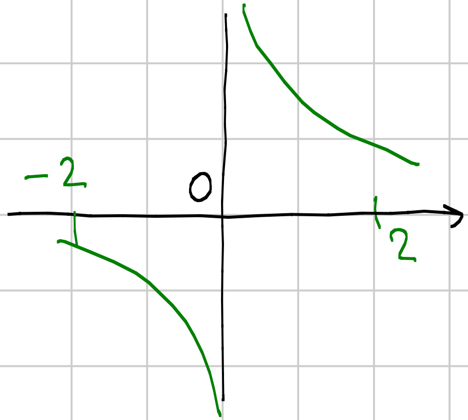
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int_0^{12} \frac{dx}{x^2} + \int_{12}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$$

pb.: non limitatezza vicino a $x=0$

pb: zona int.



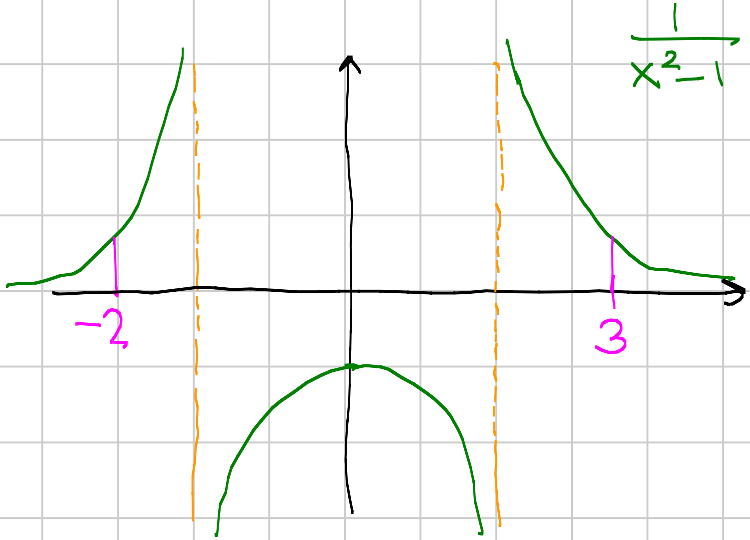
$$\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{x} + \int_{0}^{2} \frac{dx}{x}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}\, dx = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{+\infty}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2-1}\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{-2} + \int_{-2}^{-1} + \int_{-1}^{0} + \int_{0}^{1} + \int_{1}^{3} + \int_{3}^{+\infty}$$

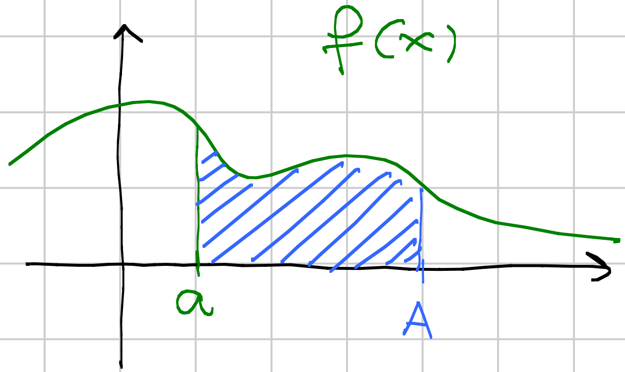


$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

L'unico problema è la zona di integrazione

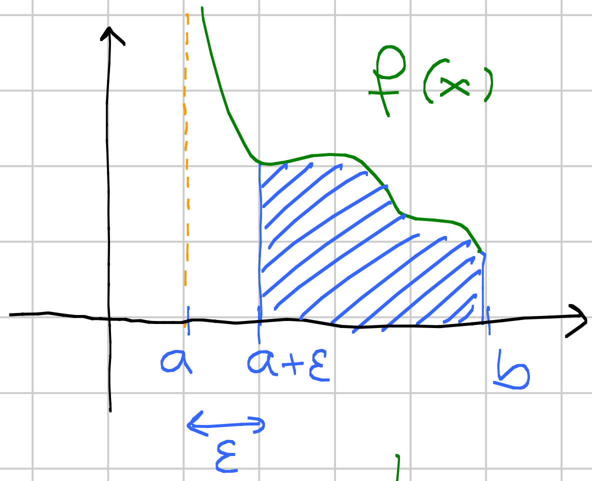
Definizioni per integrali impropri monoproblema

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x)\,dx$$



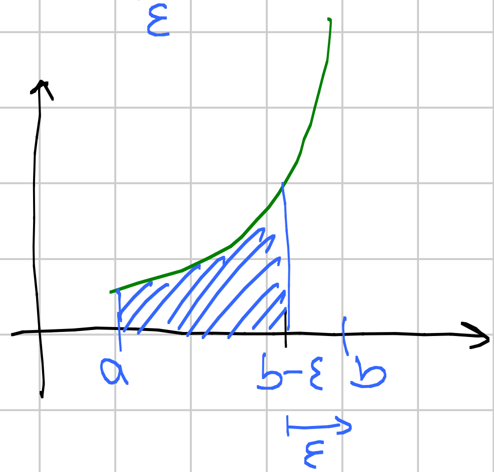
Funzione $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ con problemi in $x=a$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$



Se il problema è in $x=b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$



Esempio 1

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \left[\log x\right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \log A - \log 2 \right\} = +\infty$$

L'INT. DIVERGE A $+\infty$

(il 2 non ha nessuna importanza)

$\boxed{\text{NB}}$ Essendo un limite un int. improprio può

- convergere ($\lim = \ell \in \mathbb{R}$)
- divergere a $+\infty$
- " " $-\infty$
- essere indeterminato

Esempio 2

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{x^3} = \lim_{A\to+\infty} \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ -\underbrace{\frac{1}{2A^2}}_{\to 0} + \frac{1}{8} \right\} = \frac{1}{8}$$

CONVERGE

(cambiando 2 con un altro valore positivo continua a convergere ma cambia il limite)

Esempio 3

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A x^{-\frac{1}{3}} dx =$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} \right]_{x=2}^{x=A} = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{3}{2} \underbrace{A^{\frac{2}{3}}}_{\to +\infty} - \frac{3}{2} 2^{2/3} \right] = +\infty$$

Esempio 4 (parametrico)

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \to +\infty} \int_2^A x^{-\alpha} dx = \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left\{ \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{A^{\alpha-1}} \boxed{- \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \right\}$$

Numero e non influenza il limite

= ↗ se $\alpha - 1 > 0$, cioè $\alpha > 1$ il limite della prima parte è 0 $\Rightarrow$ l'int. converge

= ↘ se $\alpha - 1 < 0$, cioè $\alpha < 1$ il limite della prima parte è $+\infty$ $\Rightarrow$ l'int. div. a $+\infty$

Se $\alpha-1=0$, cioè $\alpha=1$, la primitiva non è quella indicata, ma si ritrova esattamente l'esempio 1 $\Rightarrow$ l'int. diverge a $+\infty$.

Conclusione: per ogni $a>0$

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \begin{cases} \nearrow \text{ converge per } \alpha>1 \\ \searrow \text{ div. a } +\infty \text{ per } \alpha\le 1 \end{cases}}$$

TABELLINA

Esempio 5

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{x=\varepsilon}^{x=1}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left\{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon\to0^+} \left\{1-\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}\right\} =$$

$\nearrow$ se $\alpha-1<0$, cioè $\alpha<1$, $\{\ \}\to 1$
$\Rightarrow$ lim è reale $\Rightarrow$ int. CONVERGE

$\searrow$ se $\alpha-1>0$, cioè $\alpha>1$, $\{\ \}\to -\infty$
$\Rightarrow$ lim è $+\infty$ $\Rightarrow$ int. div. a $+\infty$

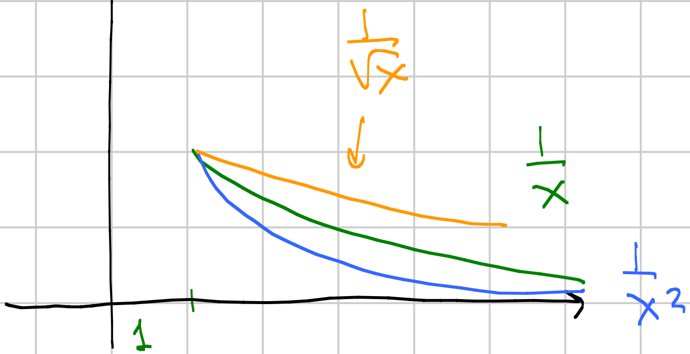
se $\alpha = 1$ occorre farlo a parte e risulta che DIVERGE.

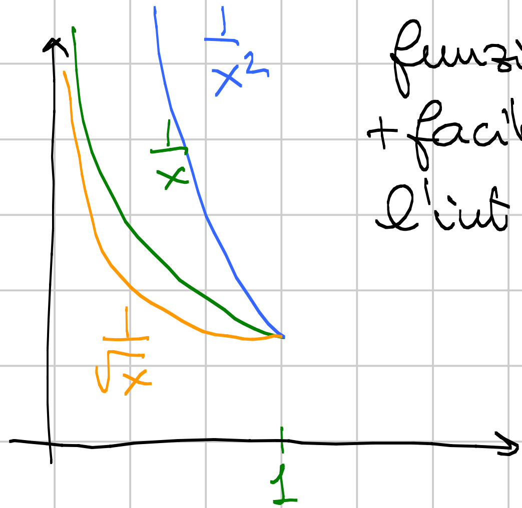
Conclusione: per ogni $a > 0$ si ha che

$$\int_0^a \frac{1}{x^\alpha}\,dx \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha < 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

TABELLINA

Esp. + grande = funzione + piccola = + facile che converga





Esp. +grande = funzione +grande = +facile che l'int diverga

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 75}}$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{A \to +\infty} \int_2^{A} \frac{dx}{x \log^2 x} = \lim_{A \to +\infty} \left[-\frac{1}{\log x} \right]_{x=2}^{x=A}$$

$$= \lim_{A \to +\infty} \left\{ -\frac{1}{\log A} + \frac{1}{\log 2} \right\} = \frac{1}{\log 2} \quad \Rightarrow \text{converge}$$

Con la stessa tecnica si dimostra che

$$\boxed{\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \log^\alpha x} \begin{cases} \nearrow \text{converge se } \alpha > 1 \\ \searrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

TABELLINA

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^{A} e^{-x}\,dx = \lim_{A\to+\infty} \Big[-e^{-x}\Big]_{x=0}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ -e^{-A} + 1 \right\} = 1$$

— o — o —

Cosa succede se l'integrale ha + problemi:

1 - si spezza in integrali monoproblemi;

2 - si studiano i singoli pezzi;

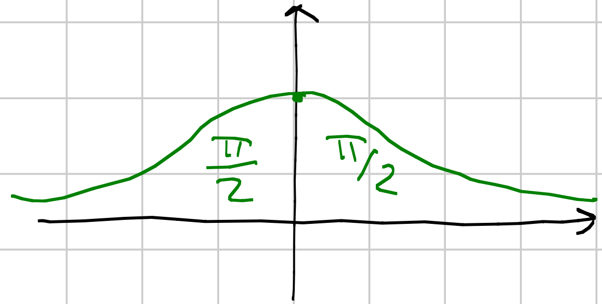
3 - si deduce il comportamento dell'integrale originario sulla base dei singoli pezzi
(se accade che un pezzo diverge a $+\infty$ e un pezzo diverge a $-\infty$ si dice PER DEFINIZIONE che l'integrale originario è INDETERMINATO)

Esempio 1

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \int_{0}^{A} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to+\infty} \left[\arctan x\right]_{x=0}^{x=A} =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \left\{ \arctan A - 0 \right\} = \frac{\pi}{2}$$



$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{0} \frac{dx}{1+x^2} = \dots = \frac{\pi}{2}$$

FUNZIONE PARI

Esempio 2

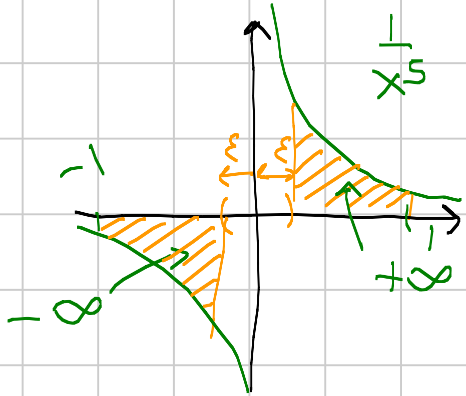
$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^5} = \int_{-1}^{1} x^{-5}\,dx = \boxed{\left[-\frac{1}{4}\,\frac{1}{x^4}\right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0}$$

NOOOO !!!!!!!!!

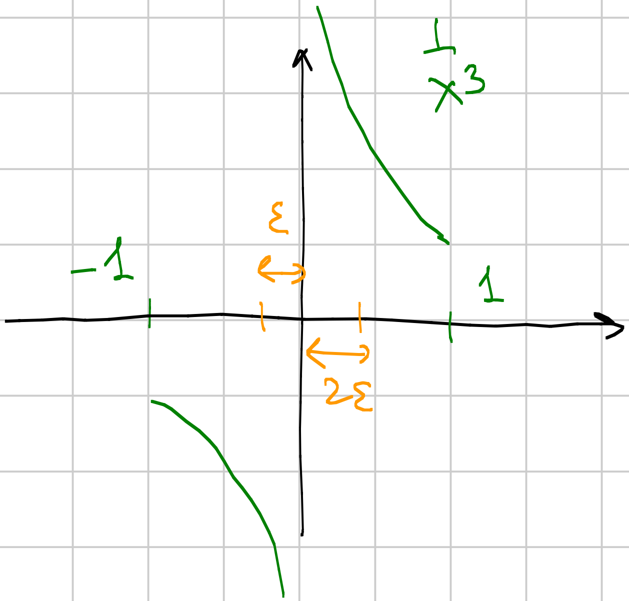
Si fa così per gli integrali PROPRI, mentre questo è IMPROPRIO

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^5} = \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^5} + \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^5}$$

DIVERGE A $+\infty$ — DIVERGE A $-\infty$ (Funzione DISPARI)



$\Rightarrow$ in base alla definizione data, l'integrale originario è INDETERMINATO



Si potrebbe dire che:

Se l'integrale converge il limite non dipende da come faccio il buco

Se l'integrale è indeterminato, buchi diversi portano a limiti diversi

Come sapere se un integrale converge o non converge senza fare la primitiva.

UTILIZZANDO CRITERI DI CONVERGENZA

Prima suddivisione:

→ INTEGRANDA A SEGNO VARIABILE

→ INTEGRANDA A SEGNO COSTANTE (positivo).

In questo caso i possibili comportamenti sono solo 2

Convergere | Divergere a $+\infty$

CRITERI

- INT. SEGNO COSTANTE
  - Criterio del confronto
  - Criterio confronto asintotico
    - casi STANDARD
    - casi limite
- INT. SEGNO VARIABILE
  - Assoluta integrabilità

TRUCCO dell'integrazione per parti

Criterio serie $\Leftrightarrow$ INTEGRALI

— o — o —

CRITERIO DEL CONFRONTO Siano $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$ nella zona di integrazione E.

Supponiamo che

$$f(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in E$$

Allora

$$\int_E f(x)\,dx = +\infty \implies \int_E g(x)\,dx = +\infty$$

$$\int_E g(x)\,dx < +\infty \text{ (cioè conv.)} \implies \int_E f(x)\,dx < +\infty$$

$$\int_E f(x)\,dx < +\infty \implies \int_E g(x)\,dx = \text{BOH !!!}$$

$$\int_E g(x)\,dx = +\infty \implies \int_E f(x)\,dx = \text{BOH !!!}$$

—o—o—

Esempio 1 $\displaystyle\int_5^{+\infty} \underbrace{\boxed{\frac{8+\sin x}{x^2}}}_{f(x)}\,dx$ converge

$f(x) \geq 0$ per $x \geq 5$ Ok $\displaystyle\frac{8+\sin x}{x^2} \leq \frac{9}{x^2}$

$$\int_5^{+\infty} \frac{9}{x^2}\,dx \quad \text{converge} \quad (\text{in tabellina } \alpha = 2 > 1)$$

$$\Downarrow \leftarrow \text{confronto}$$

$$\int_5^{+\infty} \frac{8+\sin x}{x^2}\,dx \quad \text{converge}$$

— o — o —

<u>Esempio 2</u> $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{\boxed{\frac{1}{\sin x}}}_{f(x)}\,dx$

$\sin x > 0$ per $x \in (0,1)$

quindi $f(x) > 0$ in $(0,1)$

$\sin x < x$ per ogni $x > 0$, quindi

$$\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} \qquad \text{per } x \in (0,1)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = +\infty \implies \int_0^1 \frac{dx}{\sin x} = +\infty$$