MAT I TLC

Titolo nota

ORA 71

29/11/2006

Sostituzioni razionalizzanti

$$\int \frac{dx}{e^x+1} =$$

Pongo $y = e^x$ $\quad \frac{dy}{dx} = e^x \quad dy = e^x dx$

$$\int \frac{\boxed{e^x dx}^{\,dy}}{e^x(e^x+1)} = \int \frac{dy}{y(y+1)}$$ ← FUNZIONE RAZIONALE

$$\frac{1}{y(y+1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+1} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} = \frac{\cancel{y}+1-\cancel{y}}{y(y+1)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = \log|y| - \log|y+1| =$$

$$= \log e^x - \log(e^x+1)$$

$$= x - \log(e^x+1)$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1}$$ Pongo $e^x+1=y$; $\frac{dy}{dx}=e^x$; $dy = e^x dx$

$$= \int \frac{e^x dx}{\underbrace{e^x}_{y-1}\underbrace{(e^x+1)}_{y}} = \int \frac{dy}{y(y-1)}$$

Con lo stesso metodo si fanno le primitive di tutte le funzioni razionali di e^x

$$\int \frac{e^{3x}-e^{2x}+5}{e^{4x}+1} \frac{\overbrace{e^x dx}^{dy}}{e^x} =$$ Pongo $y=e^x$, $\frac{dy}{dx}=e^x$, $dy=e^x dx$

$$= \int \frac{y^3-y^2+5}{y^4+1} \frac{1}{y}\, dy$$

Stessa cosa vale se ho potenze di a^x (con $a>0$)

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1}\,dx = \qquad y=\sqrt{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

$$x = y^2, \quad \frac{dx}{dy} = 2y, \quad dx = 2y\,dy$$

$$= \int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1}\, 2\sqrt{x}\, \overbrace{\boxed{\frac{dx}{2\sqrt{x}}}}^{dy}$$

$$= \int \frac{y^2+2}{y+1} \cdot 2y\,dy = 2\int \frac{y^3+2y}{y+1}\,dy =$$

Si potrebbe fare la divisione ...

$$= 2\int \frac{\overbrace{y^3+y^2}^{y^2(y+1)} \overbrace{-y^2-y}^{-y(y+1)} + \overbrace{3y+3}^{3(y+1)} -3}{y+1}\,dy =$$

$$= 2\int \left(y^2 - y + 3 - \frac{3}{y+1}\right) dy = 2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + 3y - 3\log|y+1|\right) =$$

$$= 2\left(\frac{x\sqrt{x}}{3} - \frac{x}{2} + 3\sqrt{x} - 3\log(\sqrt{x}+1)\right)$$

Alternativa $\displaystyle\int \frac{x+2}{\sqrt{x}+1}\,dx =$ Pongo $y = \sqrt{x}+1$

$y-1 = \sqrt{x}$

$x = y^2-2y+1$

$\frac{dx}{dy} = 2y-2$

$dx = (2y-2)\,dy$

$$= \int \frac{y^2-2y+3}{y}\,\underbrace{2(y-1)\,dy}_{dx}$$

$$= 2\int \left(y-2+\frac{3}{y}\right)(y-1)\,dy =$$

$$= 2\int \left(y^2-y-2y+2+3-\frac{3}{y}\right)dy = 2\int \left(y^2-3y+5-\frac{3}{y}\right)dy$$

$$= 2\left(\frac{y^3}{3} - 3\,\frac{y^2}{2} + 5y - 3\log|y|\right) =$$ sostituire y e controllare che venga come prima

— o — o —

$$\int \frac{x+2}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx =$$ Pongo $\sqrt[3]{x} = y$, $x = y^3$, $dx = 3y^2\,dy$

$$\int \frac{y^3+2}{y+1}\, 3y^2\, dy = \text{si sa fare}$$

— o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx =$$

Pongo $y = \sqrt[6]{x}$, $x = y^6$, $dx = 6y^5\, dy$

$$= \int \frac{y^3+2}{y^2+1}\, 6y^5\, dy = \text{si sa fare}$$

(l'unico punto costoso è la divisione)

— o — o —

$$\int \frac{\sqrt{x+1}-2}{x}\, dx =$$

$y = \sqrt{x+1}$, $y^2 = x+1 \Rightarrow x = y^2-1$

$\frac{dx}{dy} = 2y \qquad dx = 2y\, dy$

$$= \int \frac{y-2}{y^2-1}\, 2y\, dy =$$

$$= 2\int \frac{y^2-2y}{y^2-1}\, dy = 2\int \frac{y^2-1+1-2y}{y^2-1}\, dy = 2\int \left(1 + \frac{1-2y}{y^2-1}\right) dy =$$

$$= 2y + 2\int \frac{1-2y}{y^2-1}\,dy = 2y - 3\log|y+1| - \log|y-1| =$$ tornare in x

$$\frac{1-2y}{y^2-1} = \frac{1-2y}{(y+1)(y-1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y-1} = \frac{Ay - A + By + B}{(y+1)(y-1)}$$

$$\begin{cases} A+B = -2 \\ B-A = 1 \end{cases} \Rightarrow 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = B-1 = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{1-2y}{y^2-1} = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{y+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{y-1}$$

— o — o —

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x+2}}\,dx = \quad y = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} \quad \frac{dy}{dx} = \text{PESSIMA IDEA}$$

$$= \int y \left(\frac{1-2y^2}{y^2-1}\right)' dy \qquad y^2 = \frac{x+1}{x+2};\; y^2(x+2) = x+1;\; xy^2 + 2y^2 = x+1$$

$$x(y^2-1) = 1-2y^2 \Rightarrow x = \frac{1-2y^2}{y^2-1};\; dx = (\;)'\,dy$$

$$= \int \underbrace{y}_{G} \underbrace{(\quad)'}_{f} dy \quad = \quad$$ è comunque l'integrale di una funzione RAZIONALE

$$= \underset{G}{y}\, \underset{F}{\frac{1-2y^2}{y^2-1}} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\frac{1-2y^2}{y^2-1}}\, dy = \text{ si conclude facilmente.}$$

Funziona quando l'integrale contiene espressioni tipo

$$\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

NON ___ o ___ o ___

$$\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+1}+3}\, dx =$$ "LASCIATE OGNI SPERANZA"

$y = \sqrt{x+1}$ $\quad y^2 = x+1 \quad x = y^2 - 1$

$$= \int \frac{\sqrt{y^2-1}+2}{y+3} \cdot 2y\, dy$$

$dx = 2y\, dy$

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA } 72}$

$\sqrt{\text{pol. di } 2^\circ \text{ grado}}$

$$\int \sqrt{x^2+3}\, dx =$$

Pongo $\boxed{\sqrt{x^2+3} = y \qquad x^2+3 = y^2 \qquad x^2 = y^2-3}$ NO

$\sqrt{x^2+3} = x+y \; ; \quad \cancel{x^2}+3 = \cancel{x^2}+2xy+y^2$

DIVENTA DI 1° GRADO IN x

$2xy = 3-y^2 \qquad x = \dfrac{3-y^2}{2y} = \dfrac{3}{2y} - \dfrac{y}{2}$

$dx = \left(\dfrac{3}{2y} - \dfrac{y}{2}\right)' dy = \left(-\dfrac{3}{2y^2} - \dfrac{1}{2}\right) dy$

$x+y$

$$= \int \left(\frac{3-y^2}{2y} + y\right)\left(-\frac{3}{2y^2} - \frac{1}{2}\right) dy$$

sì FA!

$$\int \sqrt{2x^2+x+5}\, dx =$$

Pongo $\sqrt{2x^2+x+5} = \sqrt{2}\,x + y$

$$\cancel{2x^2}+x+5 = \cancel{2x^2} + 2\sqrt{2}\,xy + y^2$$

$$x\left(2\sqrt{2}\,y - 1\right) = 5 - y^2$$

$$x = \frac{5-y^2}{2\sqrt{2}\,y-1} \qquad dx = \left(\frac{5-y^2}{2\sqrt{2}\,y-1}\right)' dy$$

$$\sqrt{2} \quad x \quad + y$$

$$= \int \left(\sqrt{2}\,\frac{5-y^2}{2\sqrt{2}\,y-1} + y\right)\left(\frac{5-y^2}{2\sqrt{2}\,y-1}\right)' dy =$$ SI POTREBBE FARE

— o — o —

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,x + y$$

FUNZIONA SE $a > 0$

$$\int \sqrt{5x-6-x^2}\,dx = \int \sqrt{-(x^2-5x+6)}\,dx = \int \sqrt{-(x-2)(x-3)}\,dx$$

$$\sqrt{-(x-2)(x-3)} = y(x-2)\ ; \quad -\cancel{(x-2)}(x-3) = y^2(x-2)^{\cancel{2}}$$

Di primo grado in x

$$-x+3 = y^2x-2y^2 \quad ; \quad x(y^2+1) = 3+2y^2$$

$$x = \frac{3+2y^2}{y^2+1} \qquad dx = (\quad)'\,dy$$

$$= \int \underbrace{y\left(\frac{3+2y^2}{y^2+1}-2\right)}_{y(x-2)} \underbrace{\left(\frac{3+2y^2}{y^2+1}\right)'dy}_{dx} = \text{SI FA.}$$

STESSA COSA CON LA SOSTITUZIONE $\sqrt{\quad} = y(x-3)$

Questo metodo funziona se il polinomio di 2° grado si fattorizza, cioè $\Leftrightarrow$ 2 radici reali $\Leftrightarrow \Delta > 0$.

$$\sqrt{ax^2+bx+c}$$

	$a>0$	$a<0$
$\Delta>0$	$\sqrt{} = \sqrt{a}\,x+y$ FATT.	FATT.
$\Delta<0$	$\sqrt{} = \sqrt{a}\,x+y$	??

Se $a<0$ e $\Delta<0$ il polinomio è sempre negativo, quindi la radice del polinomio non ha senso, quindi non ha senso cercarne la primitiva.

$$\int \sqrt{x^2-1}\,dx =$$ Con la fattorizzazione

$$\sqrt{(x+1)(x-1)} = y(x-1)$$

$$(x+1)\cancel{(x-1)} = y^2(x-1)^{\cancel{2}}$$

$x+1 = y^2 x - y^2 \qquad x(y^2-1) = y^2+1$

$x = \frac{y^2+1}{y^2-1} \qquad dx = (\quad)' dy$

$$= \int \underbrace{y\left(\frac{y^2+1}{y^2-1} - 1\right)}_{y(x-1)} \left(\frac{y^2+1}{y^2-1}\right)' dy = \int y \frac{2}{y^2-1} (\qquad)' dy$$

$= \text{SI FA}$

Secondo modo: $\sqrt{x^2-1} = x+y$; $\cancel{x^2}-1 = \cancel{x^2}+2xy+y^2$

$2xy = -1-y^2 \qquad x = -\frac{y^2+1}{2y}$

$$= \int \underbrace{\left(-\frac{y^2+1}{2y}+y\right)}_{x+y} \underbrace{\left(-\frac{y^2+1}{2y}\right)' dy}_{dx}$$

$=$ SI FA e i denominatori sono semplici

$\int \sqrt{x^2-1}\, dx$

Funzioni iperboliche :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$$

Pongo $x = \cosh y$ $\quad dx = \sinh y \cdot dy$

$$= \int \sqrt{\cosh^2 y - 1}\, \sinh y\, dy = \int \sinh^2 y\, dy =$$

↗ per parti con grande ritorno
→ usando formule per $\cosh(2x)$
↘ in modo elementare

$$\sinh y = \frac{e^{y} - e^{-y}}{2}$$

$$\sinh^2 y = \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4}$$

—o—o—

$\int \sqrt{x^2+1}\, dx$ $\quad x = \sinh y$ .... se ne va la radice

Integrali di funzioni razionali di $\sin x$ e $\cos x$

$$\int \frac{\sin^2 x + 3\cos x - 6}{\cos^7 x - 7}\, dx$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

FORMULE PARAMETRICHE

dove $t = \tan \frac{x}{2}$

Con la sostituzione la funz. raz. di $\sin x$ e $\cos x$ diventa una funz. raz. di t. Che succede al dx?

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad \frac{x}{2} = \arctan t, \quad x = 2 \arctan t$$

$$\boxed{dx = \frac{2}{1+t^2}\, dt} \Rightarrow \text{RAZIONALE}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \underbrace{\frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2}t}}_{\frac{1}{\sin x}} \cdot \underbrace{\frac{\cancel{2}}{\cancel{1+t^2}}\, dt}_{dx} = \int \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \log|t|$$

$$= \log\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|$$

— o — o —

$\int \sin(\log x)\, dx =$ Provo $y = \log x$, $x = e^y$, $dx = e^y dy$

$= \int \sin y \cdot e^y dy$ = si fa con 2 passaggi per parti + grande ritorno.

— o — o —

$$\int \log(1-x^2)\, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log(1-x^2)}\, dx =$$

$$= \underset{F}{x}\, \underset{G}{\log(1-x^2)} - \int \underset{F}{x}\, \underset{g}{\frac{(-2x)}{1-x^2}}\, dx = \text{SI FA}$$

$$\int \log(1-x^2)\,dx = \int \log\,(1+x)(1-x)\,dx =$$

$$= \int \log(1+x)\,dx + \int \log(1-x)\,dx$$

$1+x=y$

$$\int \log(1+x)\,dx \overset{\downarrow}{=} \int \log y\,dy = (y-1)\log y = x\log(x+1)$$

$$\int \log(1-x)\,dx \underset{\uparrow}{=} -\int \log y\,dy = \dots$$

$y=1-x$

$dy=-dx$

— o — o —

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan x^2$$ [sostituzione $y=x^2$]

$$\int \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \text{CONTOSO}$$

$$\left[\; 1+x^4 = 1+x^4+2x^2-2x^2 = (x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+1+\sqrt{2}x)(x^2+1-\sqrt{2}x)\right.$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\log(1+x^4)$$

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 73}}$

Calcolare la somma di serie di potenze

$$f(x) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} c_n x^n$$

Teo 1 Esiste $R \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ t.c.

- se $|x| < R$ la serie converge ASSOLUTAMENTE
- se $|x| > R$ la serie non converge (e non verifica cond. nec.)
- se $|x| = R$ dipende dai casi

Teo 2 Se esiste $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$, allora $R = \frac{1}{L}$

Teo 3 Per le funzioni ANALITICHE (quasi tutte quelle decenti) la serie di Taylor (DOVE CONVERGE) converge alla funzione stessa

Def. La serie di Taylor di una funzione $f(x)$ è

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\boxed{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}}_{c_n} x^n$$

Esempio 1 $\quad 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

Serie di Taylor di $f(x) = e^x$ che ha $R = +\infty$

Esempio 2 $\quad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$

solo per ogni $x \in [-1, 1]$

Infatti la serie di Taylor di $\arctan x$ ha $R = 1$ e in più converge per $x = \pm 1$ per verifica diretta.

Conseguenza: (caso particolare $x=1$)

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\dots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Esempio 3 $\quad x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\dots = -\log(1-x)$

per ogni $x \in [-1, 1)$

caso $x=-1$

In particolare $\quad 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\dots = \log 2$

Esempio 4 $\quad 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots = \frac{1}{1-x}$

Teorema 4 La derivata di una serie di potenze è la serie delle derivate (all'interno del raggio di convergenza)

$\boxed{\text{Teorema 5}}$ Se devo fare la primitiva di una serie di potenze (nulla per $x=0$)

basta fare la serie delle primitive (nulle in $x=0$)

Esempio 5 $\quad 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots = \dfrac{1}{1+x}$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + \dots = \frac{1}{1+x^2}$$

Se faccio "la" primitiva

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \arctan x$$

Esempio 6 $\quad \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+3} =$ $\qquad$ Assomiglia a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

$$= \frac{1}{x^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{n+3} = \frac{1}{x^3} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{1}{x^3} \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \underset{n=1}{x} - \underset{n=2}{\frac{x^2}{2}} \Big)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(-\log(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)$$

La formula vale $\forall x$ per cui la serie converge (nel nostro caso per $x \in [-1, 1)$).

— o — o —

<u>Esempio 7</u> $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots$$

$$= x\left(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots\right)$$

$$= x\left(x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots\right)'$$

$$= x\Big(-1 + \underbrace{1 + x + x^2 + x^3 + \dots}_{\text{SERIE NOTA}}\Big)'$$

$$= x\left(-1 + \frac{1}{1-x}\right)' = x\left(\frac{-1+x+1}{1-x}\right)' = x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$= x\,\frac{1-\cancel{x}+\cancel{x}}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$ per ogni x per cui la serie converge, in questo caso $x \in (-1,1)$

— o — o —

Altro modo $\quad x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots =$

$$= x(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{x}{1-x}$$

<u>In generale</u> $\quad x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + \dots =$

$$= x^7(1 + x + x^2 + \dots) = \frac{x^7}{1-x}$$

— o — o —

<u>Esempio 8</u> $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot n x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} x^n\right)' \underset{\text{TEO. SCAMBIO}}{=} x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n\right)' =$$

$$\frac{n}{n+1} x^n = \frac{n+1-1}{n+1} x^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) x^n\right)'$$

$$= x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}\right)' = (\star)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n} =$$

$$= \frac{1}{x} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - x\right)$$

$$= \frac{1}{x} \left(-\log(1-x) - x\right)$$

$$(\star) = x\left(\frac{x}{1-x} + \frac{1}{x}\left(\log(1-x)+x\right)\right)'$$

$$= x\left(\frac{x}{1-x} + \frac{\log(1-x)}{x} + 1\right)' \longrightarrow$$

Basta calcolare la derivata e la somma è calcolata.