Integrazione per sostituzione

$$\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \int_a^b F(G(x))\,g(x)\,dx$$

Sostituzioni che si vedono "a occhio"

Es. 1 $\int x \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int 2x \cdot \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sin x^2$

Pongo $y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2x$, $dy = 2x\,dx$

$$\frac{1}{2}\int \underbrace{2x \cos x^2\, dx}_{dy} = \frac{1}{2}\int \cos y\, dy = \frac{1}{2}\sin y = \frac{1}{2}\sin x^2$$

Es. 2 $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3}$ [$y = x^3$ ...]

Es. 3 $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

[$y = x^2$ oppure anche $y = 1+x^2$]

Es. 4 $\displaystyle\int \frac{ax+b}{1+x^2}\,dx = a\int \frac{x}{1+x^2}\,dx + b\int \frac{1}{1+x^2}$

$\displaystyle= \frac{a}{2}\log(1+x^2) + b\arctan x$

Es. 5 $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+(\sqrt{2}x)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x)$

$\boxed{y = \sqrt{2}x}$

Es. 6 $\displaystyle\int \frac{dx}{3+x^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{3}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$\displaystyle= \frac{1}{3}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

In generale $\int \frac{dx}{a+x^2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)$ $\boxed{\text{per } a>0}$

Es. 7 $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{1+(x+1)^2} = \arctan(x+1)$

Es. 8 $\int \frac{x+5}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+10}{x^2+2x+3}\,dx =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{8}{x^2+2x+3}\,dx$

$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) + 4\int \frac{1}{2+(x+1)^2}\,dx$ $\rightarrow$ $y = x+1$

$\frac{dy}{dx} = 1, \; dy = dx$

$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+3) + 4\,\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$

Es. 9 $\int \frac{x+5}{4x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{8x+40}{4x^2+4x+5}\,dx =$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5}\,dx + \frac{1}{8}\int \frac{36}{4x^2+4x+5}\,dx$$

$$= \frac{1}{8}\log(4x^2+4x+5) + \frac{9}{2}\underbrace{\int \frac{\boxed{dx \quad \frac{2}{2}}}{4+(2x+1)^2}}$$ dy

$y = 2x+1$

$\frac{dy}{dx} = 2 \qquad dy = 2\,dx$

$$= \frac{9}{4}\int \frac{dy}{4+y^2} = \frac{9}{4}\,\frac{1}{2}\arctan\frac{y}{2}$$

$$= \frac{1}{8}\log(4x^2+4x+5) + \frac{9}{8}\arctan\frac{2x+1}{2}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Es. 10}}$ $\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \qquad x = \sin y,\ \frac{dx}{dy} = \cos y,\ dx = \cos y\,dy$

$$= \int \sqrt{1-\sin^2 y}\,\cos y\,dy = \int \cos y \cdot \cos y\,dy = \int \cos^2 y\,dy =$$

BRUTALE: ci vorrebbe $\pm$ a seconda dei casi

$$= \frac{y}{2} + \frac{\sin y \cos y}{2} = \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2} \cos y =$$

$y = \arcsin x$

$$= \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}$$

$$\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

DI NUOVO

$\sin(\arcsin x) = x$ PERICOLOSO

In realtà in questo tutti i passaggi sarebbero leciti, ma in ogni caso è meglio derivare alla fine.

— o — o —

INTEGRAZIONE FUNZIONI RAZIONALI

$$\text{funzione razionale} = \frac{\text{polinomio }(x)}{\text{polinomio }(x)}$$

Data una funzione razionale è "POSSIBILE" determinare una sua primitiva procedendo in 4 fasi:

1 – DIVISIONE

2 – FATTORIZZAZIONE

3 – SISTEMA LINEARE

4 – INTEGRAZIONE

① DIVISIONE. Sia $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Se grado $(P(x)) <$ grado $(Q(x))$ si va dirett. alla fase 2.

Se grado $(P(x))$ è $\geq$ grado $(Q(x))$ facciamo la divisione di $P(x)$ per $Q(x)$

$$P(x) = \underset{\text{QUOZIENTE}}{A(x)}\, Q(x) + \underset{\text{RESTO}}{R(x)}$$

QUOZIENTE

RESTO (con grado $(R(x)) <$ grado $Q(x)$)

Ma allora

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A(x)\,Q(x) + R(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Quindi

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio
$\Downarrow$
primitiva facile

funzione raz. con grado (Num) < grado (Den.)

Pertanto basta saper integrare le funzioni raz. in cui il num. ha grado < del denom.

(2) FATTORIZZAZIONE Scomporre $Q(x)$ ← Denominatore

Ogni polinomio $Q(x)$ a coeff. reali si può scrivere come prodotto di fattori di 1° e 2° grado, a loro volta non ulteriormente scomponibili

FATTO GENERALE

Teoricamente, non è detto che i fattori si trovino esplicitamente

I fattori di 1° grado sono ovviamente non scomponibili
" 2° " sono NON scomponibili $\Leftrightarrow \Delta < 0$

Al termine della fase 2 avremo scomposto $Q(x)$ nella forma

$$Q(x) = (a_1 x + b_1)^{m_1} (a_2 x + b_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (a_k x + b_k)^{m_k} \cdot (c_1 x^2 + d_1 x + e_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot$$
$$\cdot (c_\ell x^2 + d_\ell x + e_\ell)^{n_\ell}$$

Scomposizione come prodotto di k fattori di 1° grado con molt. $m_1, \ldots, m_k$ e ℓ fattori di 2° grado di molt. $n_1, \ldots, n_\ell$.

$\boxed{\text{N.B.}}$ $\text{grado}(Q(x)) = m_1 + m_2 + \ldots + m_k + 2(n_1 + \ldots + n_\ell)$

MAT I TLC

ORA 70

Esempio $\displaystyle\int \frac{x^5+1}{x^4+x^2}\,dx$

Divisione

$$\begin{array}{r|l} x^5 \quad +1 & x^4+x^2 \\ \cline{2-2} -x^5-x^3 \quad & \boxed{x} \\ \cline{1-1} \boxed{-x^3+1} & \end{array}$$

Quoziente: $A(x)$

Resto $R(x)$

$$x^5+1 = x\,(x^4+x^2) + (-x^3+1)$$

$$\frac{x^5+1}{x^4+x^2} = x + \frac{1-x^3}{x^4+x^2} \Rightarrow \int \frac{x^5+1}{x^4+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{1-x^3}{x^4+x^2}\,dx$$

Fattorizzazione $x^4+x^2 = x^2(x^2+1)$

Fattore di 1° grado di molt 2.

Fattore di 2° grado di molt 1.

1. SISTEMA LINEARE   Supponiamo di dover integrare

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$$

sopra i fattori di 1° grado si mettono costanti

sopra i fattori di 2° grado si mettono fattori di 1° grado

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x+5)(x^2+2)(x^2+7)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{x^2+7}$$

$$\frac{1-x^3}{x(x+7)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+7} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+5}$$

Non scomponibile

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2} = \frac{A(x^2+2)+(x-1)(Bx+C)}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$= \frac{Ax^2 + 2A + Bx^2 + Cx - Bx - C}{(x-1)(x^2+2)}$$

$$\begin{cases} A + B = 1 & \text{coeff. di } x^2 \\ C - B = 0 & \text{coeff. di } x \\ 2A - C = 3 & \text{coeff. di } x^0 \text{ (termine noto)} \end{cases}$$

SISTEMA LINEARE

$1^a + 2^a$: $A + C = 1$ Sommo: $3A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{3}$

3^a: $2A - C = 3$

$B = 1 - A = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ $C = B$

Alla fine del sistema lineare ho che

$$\frac{x^2+3}{(x-1)(x^2+2)} = \frac{4}{3}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{3}\frac{x+1}{x^2+2}$$

Nel sistema lineare le incognite sono tante quanto è il grado del denom, le equazioni sono altrettante

Se grado (den) = k il grado num è $\leq k-1$, quindi le eq. riguardano i coeff. di $x^0, x^1, \dots, x^{k-1}$ $\Rightarrow$ k equazioni

Si può dimostrare che questo sistema ha sempre soluz. UNICA.

Tutto questo vale se non ci sono molteplicità. Se ci sono?

$$\frac{x^2+3}{(x-1)^4(x-2)(x^2+1)^3(x^2+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2+3} + \frac{d}{dx}\,\frac{Gx^6+Hx^5+Ix^4+Jx^3+Kx^2+Lx+M}{\underbrace{(x-1)^3(x^2+1)^2}_{\text{parte INUTILIZZATA DEL DENOMINATORE}}}$$

al numeratore si mette un fattore generico di grado di 1 inferiore al denominatore

Derivata

Esempio

$$\frac{1-x^3}{x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{d}{dx}\,\frac{D}{x}$$

$$= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} - \frac{D}{x^2}$$

$$= \frac{Ax(1+x^2) + (Bx+C)x^2 - D(1+x^2)}{x^2(1+x^2)}$$

$$= \frac{Ax + Ax^3 + Bx^3 + Cx^2 - D - Dx^2}{x^2(1+x^2)}$$

$A+B = -1$	coeff. di x^3	$A = 0$
$C-D = 0$	coeff. di x^2	$B = -1$
$A = 0$	coeff. di x	$C = -1$
$-D = 1$	termine noto	$D = -1$

Conclusione:

$$\frac{1-x^3}{x^2(1+x^2)} = -\frac{1+x}{1+x^2} + \frac{d}{dx}\frac{-1}{x}$$

Alla fine della fase 3 abbiamo 3 tipi di termini

* termini del tipo $\frac{a}{bx+c}$ $\rightsquigarrow$ si integrano facilmente
* termini del tipo $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ $\rightsquigarrow$ si integrano con un po' di log e un po' di arctan

  Non scomp.
* termini del tipo $\frac{d}{dx}(\text{roba})$ $\rightsquigarrow$ per integrarli basta togliere $\frac{d}{dx}$

FASE 4

$$\int \frac{1-x^3}{x^4+x^2}\,dx = -\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx + \int \cancel{\frac{d}{dx}}\left(\frac{-1}{x}\right) \cancel{dx}$$

$$-\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \boxed{\frac{1}{2}\log(1+x^2) + \arctan x}$$

Esempio 1

$$\int \frac{dx}{x^2-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-1}$$

Divisione: non serve

Fatt.: $x^2-1 = (x+1)(x-1)$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

si potrebbe fare il sistema

Molt. per $(x-1)$: $\frac{1}{x+1} = \frac{A}{(x+1)}(x-1) + B$

Metto $x=1$: $\boxed{\frac{1}{2} = B}$

Molt. per $(x+1)$: $\frac{1}{x-1} = A + \frac{B}{(x-1)}(x+1)$

Metto $x=-1$: $\boxed{-\frac{1}{2} = A}$

$$\frac{1}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x^2-1}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x-1|$$

$$= \log\sqrt{\frac{|x-1|}{|x+1|}}$$

Esempio...

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-x}\,dx \qquad x^3-x = x(x^2-1)$$
$$= x(x+1)(x-1)$$

$$\frac{x^2+1}{x(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}$$

Molt. per x $\quad \dfrac{x^2+1}{(x+1)(x-1)} = A + \dfrac{Bx}{x+1} + \dfrac{Cx}{x-1}$

$\boxed{x=0} \rightsquigarrow \boxed{-1 = A}$