MAT I TLC

ORA 67

Titolo nota 25/11/2006

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{x=b}$$

dove $F(x)$ è una qualunque funzione tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in [a,b]$. Queste $F(x)$ si chiamano PRIMITIVE di $f(x)$

Esempio: $f(x) = x^2$ $\quad F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ è una primitiva di $f(x)$ su tutto $\mathbb{R}$

Per ogni valore della costante c la funzione

$F(x) = \dfrac{x^3}{3} + c$ è una primitiva della $f(x)$.

Ce ne sono altre? NO perchè abbiamo visto che su un intervallo 2 primitive differiscono per una costante.

Esempio 2 $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad F(x) = \log x$ è una primitiva di $f(x)$ nell'insieme $x > 0$.

Domanda: poiché $\frac{1}{x}$ è def. $\forall x \neq 0$ ha senso cercare una funzione $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \neq 0$.

Risposta: una possibilità è $F(x) = \log|x|$. Per $x > 0$ non cambia nulla. Per $x < 0$

derivata di $-x$

$$F(x) = \log|x| = \log(-x) \qquad F'(x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Come sono fatte tutte le primitive di $\frac{1}{x}$? Sono $\boxed{F(x) = \log|x| + c}$

NOOO!!!!

Sono

$$F(x) = \begin{cases} \log|x| + c_1 & \text{per } x > 0 \\ \log|x| + c_2 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

posso usare "2 c diversi"

Conclusione:

* mettere "+c" non serve per il calcolo di $\int_a^b f(x)\,dx$

* mettere "+c" non serve per determinare l'insieme di tutte le primitive (occorrono "c diversi" su ogni "pezzo" dell'insieme di definizione).

$\Rightarrow$ non ci sono ragioni valide per mettere "+c"!

— o — o —

$\int f(x)\,dx$ = integrale INDEFINITO = sinonimo di primitiva

↑ senza estremi

— o — o —

CALCOLO DI PRIMITIVE

Casi banali: tabella delle derivate letta al contrario

$\int e^x dx = e^x$, $\int \cos x\, dx = \sin x$, $\int \sin x\, dx = -\cos x$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| \; ; \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x \qquad \int \cosh x\,dx = \sinh x$$

$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}$$ vale se $a \neq -1$, se $a=-1$ è $\int \frac{1}{x}\,dx \ldots$

Casi semibanali:

$$\int e^{3x}\,dx = \frac{e^{3x}}{3}$$

$$\int \sin(5x)\,dx = -\frac{\cos(5x)}{5} \; ; \qquad \int \frac{1}{x+3}\,dx = \log|x+3|$$

$$\int \cos(x+2)\,dx = \sin(x+2) \; ; \qquad \int \cos(2x+1)\,dx = \frac{\sin(2x+1)}{2}$$

$$\int \frac{1}{3x+2}\,dx = \frac{\log|3x+2|}{3} = \log\sqrt[3]{|3x+2|}$$

PRECORSO

INTEGRAZIONE PER PARTI

$F, G \qquad F' = f \qquad G' = g$

$$[F \cdot G]' = F' \cdot G + F \cdot G' = fG + Fg$$

$$F(b) \cdot G(b) - F(a) \cdot G(a) = [F(x) \cdot G(x)]_a^b =$$

Una funzione è l'integrale della sua derivata

$$= \int_a^b [F \cdot G]' \, dx = \int_a^b (fG + Fg) \, dx$$

$$= \int_a^b fG \, dx + \int_a^b Fg \, dx$$

$$\boxed{\int_a^b fG \, dx = [FG]_a^b - \int_a^b Fg \, dx}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

<u>Esempio 1</u>

$$\underbrace{\int x e^x dx}_{G\ f} = \underbrace{e^x x}_{FG} - \underbrace{\int e^x \cdot 1 \, dx}_{Fg} = \boxed{xe^x - e^x}$$

DERIVARE PER CONTROLLO

__Esempio 2__

$$\int \underset{G}{x}\, \underset{f}{\cos x}\, dx = \underset{G}{x}\, \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{1} \cdot \underset{F}{\sin x}\, dx$$

$$= x \sin x + \cos x$$

__Esempio 3__

$$\int \underset{G}{x^2}\, \underset{f}{\sin x}\, dx = \underset{G}{x^2}\, \underset{F}{(-\cos x)} - \int \underset{g}{(2x)}\, \underset{F}{(-\cos x)}\, dx$$

Fatto sopra

$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

Con questa tecnica si fanno tutti gli integrali del tipo

$$\int p(x)\, e^{\alpha x}\, dx, \qquad \int p(x) \cos(\alpha x)\, dx, \qquad \int p(x) \sin(\alpha x)\, dx$$

polinomio in x

N.B. se il polinomio ha grado n, servono n passaggi per parti (il grado scende di 1 ogni volta)

$$\int 3^x dx = \int e^{\log 3 \cdot x} dx = \frac{e^{\log 3 \cdot x}}{\log 3} = \frac{3^x}{\log 3}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \qquad (a > 0 \text{ e } a \neq 1)$$

— o — o —

Esempio 4

$$\boxed{\int \log x \, dx} = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\log x} \, dx = \underset{F}{x} \, \underset{G}{\log x} - \int \underset{F}{x} \cdot \underset{g}{\frac{1}{x}} \, dx$$

$$= x \log x - \int 1 \, dx$$

$$\boxed{= x \log x - x}$$

Esempio 5 $\int \arctan x \, dx = \int \underset{f}{1} \cdot \underset{G}{\arctan x} \, dx =$

$$x \cdot \arctan x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2}\,dx = x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

F G F g

$$= x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) = x \arctan x - \log\sqrt{1+x^2}$$

— o — o —

Esempio 6 $\int \log^2 x\,dx = \int 1 \cdot \log^2 x\,dx = x\log^2 x - \int \cancel{x} \cdot (2\log x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$

f G F G Fg

$$= x\log^2 x - 2\int \log x\,dx = \boxed{x\log^2 x - 2x\log x + 2x}$$

CONTROLLARE

In questo modo si fanno quelli del tipo

$$\int p(x)\,\log^k x\,dx$$

polinomio in x

MAT I TLC

ORA 68

$\boxed{\text{Esempio 7}}$ $\int \cos^2 x\,dx = \int \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{f}{\cos x}\,dx = \underset{G}{\cos x} \cdot \underset{F}{\sin x} - \int \underset{g}{(-\sin x)}\,\underset{F}{\sin x}\,dx$

$= \cos x \cdot \sin x + \int \sin^2 x\,dx = \cos x \cdot \sin x + \int (1-\cos^2 x)\,dx$

$= \cos x \cdot \sin x + \int 1\,dx - \int \cos^2 x\,dx$

$= \cos x \cdot \sin x + x \underbrace{- \int \cos^2 x\,dx}_{\text{lo porto a sx}}$

GRANDE RITORNO!!

$2\int \cos^2 x\,dx = \cos x \cdot \sin x + x \Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \frac{\cos x \cdot \sin x + x}{2}$

Esempio 8 $\int \underset{f}{e^x} \underset{G}{\cos x}\, dx = \underset{F}{e^x} \underset{G}{\cos x} - \int \underset{Fg}{e^x (-\sin x)}\, dx$

$$= e^x \cos x + \int \underset{f}{e^x} \underset{G}{\sin x}\, dx =$$

→ provare cosa succede con la scelta inversa...

$$= e^x \cos x + \underset{F}{e^x} \underset{G}{\sin x} - \boxed{\int \underset{Fg}{e^x \cos x}\, dx}$$

GRANDE RITORNO!

lo porto a sx

$$\cancel{2} \int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x (\cos x + \sin x)}{2},$$

Stessa cosa per integrali del tipo

$$\int e^{ax} \cos(bx)\, dx$$

$$\int e^{ax} \sin(bx)\, dx$$

Esempio 9

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \right) dx$$

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2 x = \dfrac{\cos(2x)+1}{2}$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x}{2} + \frac{2\sin x \cos x}{4} = \frac{x + \sin x \cos x}{2}$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} \right) dx$$

$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

$$= \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \int \cos(2x)\, dx$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} = \ldots$$

$$\int \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \int 2 \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x)\, dx$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{4} = \ldots$$

Allo stesso modo si fanno gli int. del tipo

$$\int \sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)\,dx$$ (trasformare il prodotto in somma mediante formule trigonometriche)

$$\int e^{cx}\sin(\alpha x)\cdot\cos(\beta x)\,dx$$ (come sopra + grande ritorno)

<u>Esempio 10</u>

$$\int \sin^4 x\,dx = \int \underset{f}{\sin x}\cdot\underset{G}{\sin^3 x}\,dx =$$

$$= \underset{F}{(-\cos x)}\,\underset{G}{\sin^3 x} - \int \underset{F}{(-\cos x)}\,\underset{g}{3\cdot\sin^2 x\cdot\cos x}\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\sin^3 x + 3\int \sin^2 x\cdot\overset{(1-\sin^2 x)}{\cos^2 x}\,dx$$

$$= -\cos x\cdot\sin^3 x + 3\int\sin^2 x\,dx\ \underbrace{-\,3\int\sin^4 dx}_{\text{PORTO A SINISTRA}}$$

GRANDE RITORNO!

$$4\int \sin^4 x\,dx = -\cos x \cdot \sin^3 x + 3\underbrace{\int \sin^2 x\,dx}_{\text{si sa fare.}}$$

Allo stesso modo si fanno tutte le potenze (intere positive) di $\sin x$ e $\cos x$ (ad ogni passaggio per parti l'esponente scende di 2)

— o — o —

$\boxed{\text{INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE}}$ Versione ufficiale

$$\Big[F(G(x))\Big]_{x=a}^{x=b} = \int_a^b \Big[F(G(x))\Big]' dx$$

$$= \int_a^b F'(G(x)) \cdot G'(x)\,dx = \int_a^b f(G(x))\,g(x)\,dx \quad (1)$$

$$\left[F(G(x)) \right]_{x=a}^{x=b} = F(G(b)) - F(G(a))$$

$$= \left[F(x) \right]_{x=G(a)}^{x=G(b)}$$

$$= \int_{G(a)}^{G(b)} F'(x)\,dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx \qquad (2)$$

(1) = (2) Diventa

$$\boxed{\int_{G(a)}^{G(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(G(x))\,g(x)\,dx}$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE
PER SOSTITUZIONE

Esempio 1

$$\int \frac{\log^3 x}{x} dx =$$

Pongo $y = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$; $dy = \frac{dx}{x}$

$$= \int y^3 dy = \frac{y^4}{4} = \frac{\log^4 x}{4}$$

$\boxed{\text{N.B.}}$ Ho applicato la formula data con

$f(x) = x^3$, $G(x) = \log x$

Esempio 2

$$\int \frac{dx}{x \log x} =$$

dy

Pongo $y = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ $\qquad dy = \frac{dx}{x}$

$$= \int \frac{dy}{y} = \log|y| = \log|\log x|$$

Esempio 3

$$\boxed{\int \tan x \, dx =} \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

Pongo $y = \cos x$

$\frac{dy}{dx} = -\sin x$

$dy = -\sin x \cdot dx$

$$= -\int \frac{(-\sin x)}{\cos x}\,dx \quad dy \qquad = -\int \frac{dy}{y} = -\log|y|$$

$$= -\log|\cos x| = \boxed{\log \frac{1}{|\cos x|}}$$

<u>Esempio 4</u> $\int \tan x\,dx = \int \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}\,dx =$

$f \qquad G$

$$= (-\cos x)\frac{1}{\cos x} - \int (-\cos x)\left(-\frac{1}{\cos^2 x}\right)(-\sin x)\,dx$$

$F \qquad G \qquad Fg$

$$= -1 + \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -1 + \underbrace{\int \tan x\,dx}_{\text{PORTO A SINISTRA E OTTENGO}}$$

GRANDE RITORNO ??

$$\boxed{0 = -1}$$