MAT I TLC

ORA 65

Titolo nota 23/11/2006

Calcolo integrale → integrali propri in 1 variabile
→ " impropri "
→ " in + variabili (2 o 3)
→ equazioni differenziali

$\boxed{\text{INTEGRALI}}$

1. Come si indicano

2. Significato geometrico

3. Come si definiscono (definirebbero)

4. Come si calcolano

① Notazioni Ingredienti:

* un intervallo $[a,b]$ (limitato) ZONA DI INTEGRAZIONE

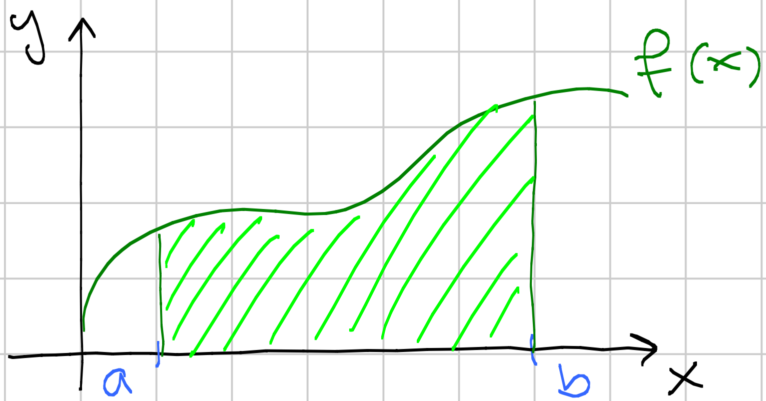
* una funzione $f:[a,b]$ limitata INTEGRANDA

$$\int_a^b f(x)\,\underbrace{dx}$$

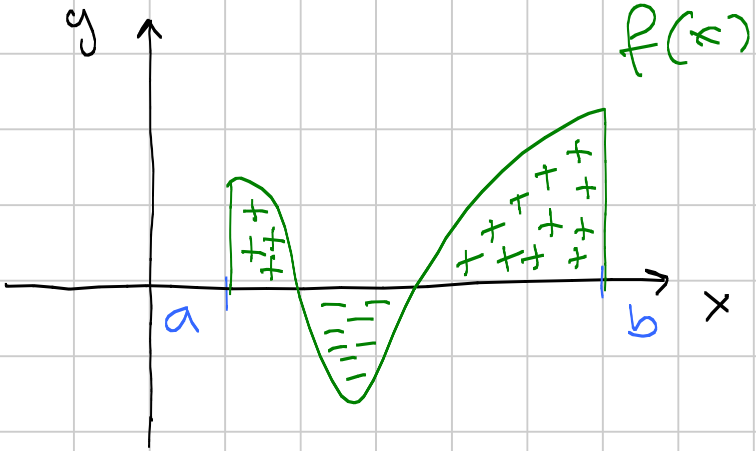
ricorda la variabile rispetto a cui si integra

Stilizzazione del simbolo S che sta per "somma"

② SIGNIFICATO GEOMETRICO: $\int_a^b f(x)\,dx =$



$=$ area $\boxed{\text{CON SEGNO}}$ della parte di piano compresa tra grafico di f e asse x



Se la funzione $f(x)$ non è positiva, allora

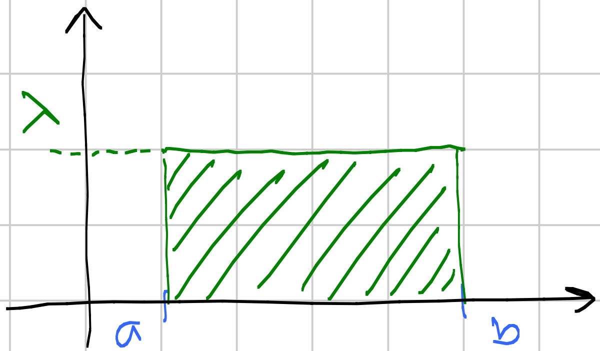
$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area della regione } \oplus - \text{area della regione } \ominus$$

(3) IDEE DELLA DEFINIZIONE

3 casi → caso BANALE
→ caso SEMIBANALE
→ caso GENERALE

Caso banale

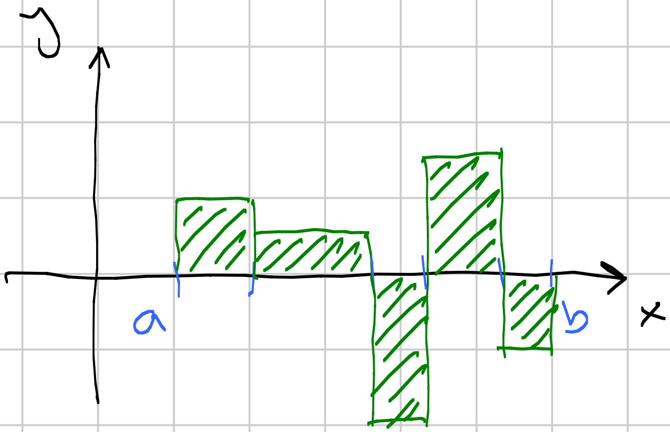
$f(x)$ è uguale ad una costante λ $\forall x \in [a,b]$



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area CON SEGNO del rettangolo} = \lambda\,(b-a)$$

altezza con segno · base

$\boxed{\text{Caso semibanale}}$ L'intervallo $[a,b]$ è suddiviso in un numero finito di sottointervalli, su ciascuno dei quali f è costante



In questo caso si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{somma algebrica delle aree con segno dei sottorettangoli.}$$

Le funzioni di questo tipo si chiamano

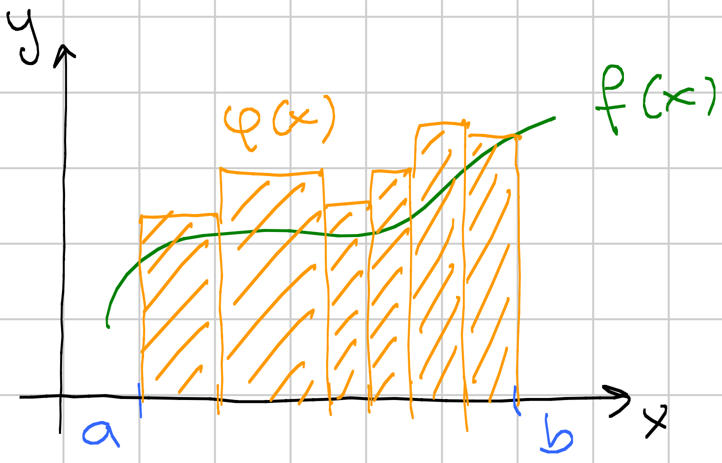
FUNZIONI SEMPLICI

" A GRADINO

STEP FUNCTIONS

SINONIMI

$\boxed{\text{Caso generale}}$ $f(x)$ è una qualunque funzione <u>limitata</u>.



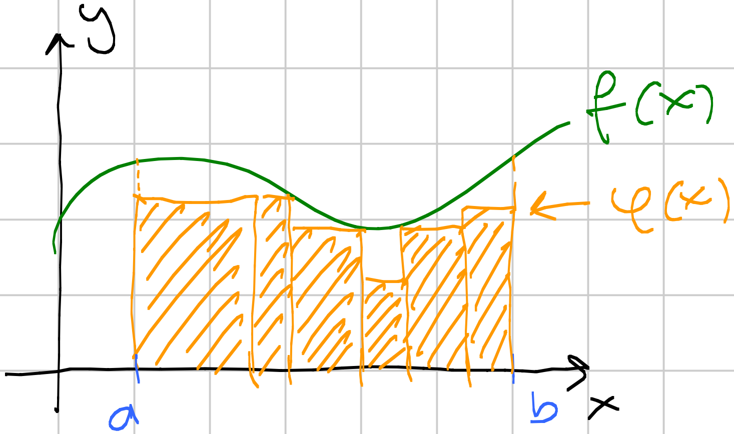
Definiamo l'integrale superiore di $f(x)$ nell'intervallo $[a,b]$

$$I^+(f;[a,b]) =$$

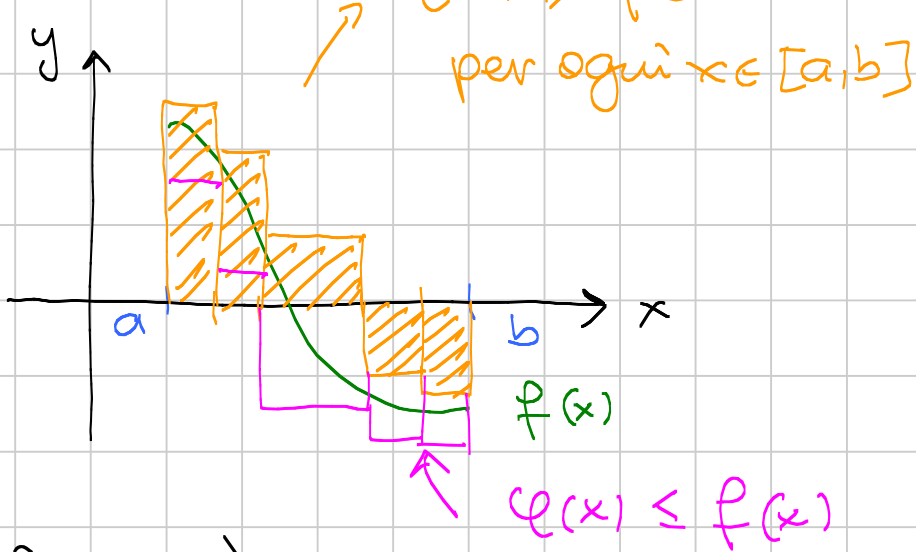
$$= \inf \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi(x) \text{ è una funzione a gradini e } \varphi(x) \geq f(x) \text{ per ogni } x \in [a,b] \right\}$$

Analogamente si definisce l'integrale inferiore:

$$I^-(f;[a,b]) = \sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)\,dx : \varphi(x) \text{ è una funzione a gradini e } \varphi(x) \leq f(x) \text{ per ogni } x \in [a,b] \right\}$$



Occhio



$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ $I^+(f,[a,b])$ e $I^-(f,[a,b])$ sono OBBLIGATI ad esistere e si ha sempre che

$$I^-(f;[a,b]) \leq I^+(f;[a,b])$$

$\boxed{\text{DEFINIZIONE}}$ Se accade che $I^-(f;[a,b]) = I^+(f;[a,b])$, allora si dice che $f(x)$ è INTEGRABILE (secondo RIEMANN) in $[a,b]$ e il valore comune è l'integrale cercato.

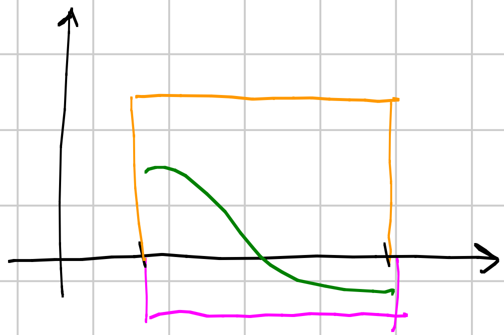
$\boxed{\text{OSSERVAZIONI}}$ ① Esistono funzioni (ORRIBILI) per cui $I^- < I^+$, cioè non tutte le funzioni sono integrabili

② Si potrebbe dimostrare che le seguenti classi di funzioni sono integrabili:

* tutte le funzioni continue
* tutte le funzioni monotone
* tutte le funzioni con un numero finito di p.ti di discontinuità in cui esiste il limite da destra e da sinistra

③ Tutto quanto detto/scritto vale per funzioni limitate.
Abbiamo usato da qualche parte che $f(x)$ è limitata?

$\boxed{\text{SI}}$ serve per essere sicuri che esistano una funzione a gradini $\geq f$ e una $\leq f$



SOMME DI RIEMANN: integrali delle funzioni a gradino

ESTENSIONI DELLA DEFINIZIONE

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \int_b^a f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx$$

N.B. $a < b$, quindi sto mettendo gli estremi al contrario.

PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \left(\lambda f(x)\right)dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

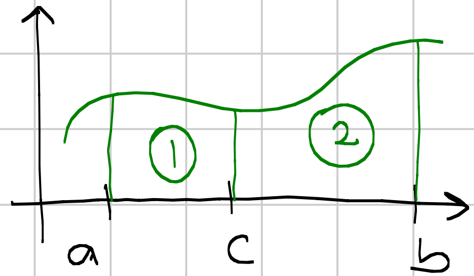
L'integrale tra a e b è un'APPLICAZIONE LINEARE (da dove a dove?)

Se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

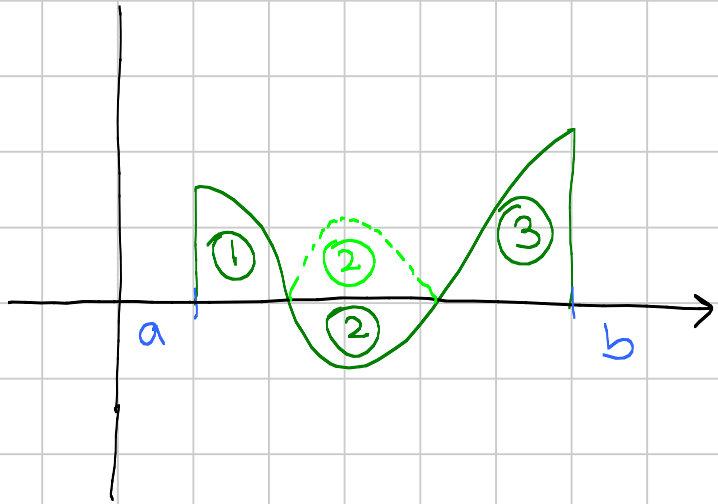
MONOTONIA

Se $c \in (a,b)$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^c f(x)\,dx}_{1} + \underbrace{\int_c^b f(x)\,dx}_{2}$$



$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$



$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = |1 - 2 + 3|$$

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = 1 + 2 + 3$$

1, 2, 3 are positive

MAT I TLC

ORA 66

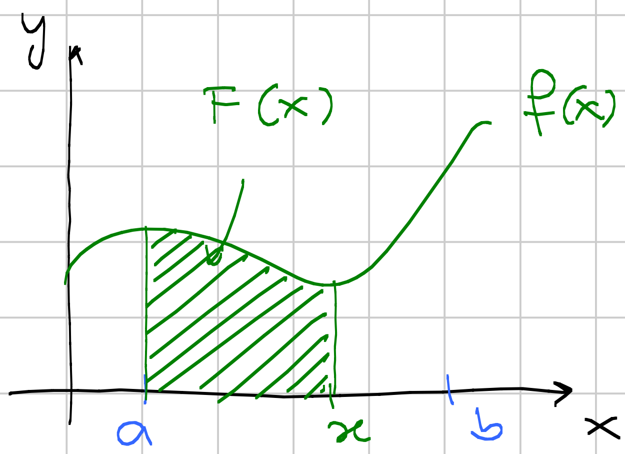
Tecniche di calcolo
- FUNZIONE INTEGRALE
- TEO. MEDIA INTEGRALE
- TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INT.
- PRIMITIVE

FUNZIONE INTEGRALE

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Funzione integrale

variabile di integrazione, che posso chiamare come voglio

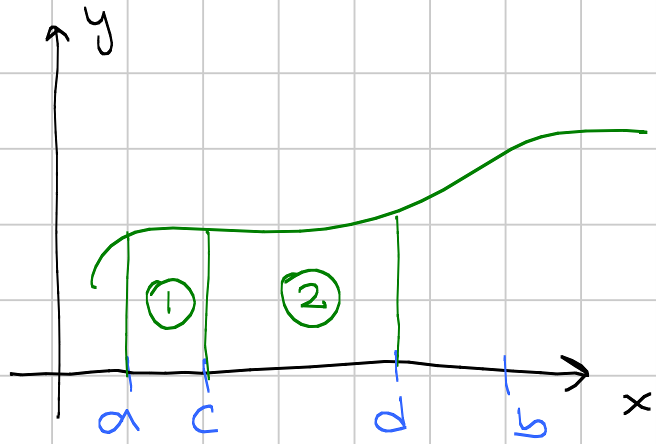


Dato un intervallo $[c,d] \subseteq [a,b]$ si ha che

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c)$$

$F(d) =$ integrale tra a e d $= ① + ②$

$F(c) =$ " " a e c $= ①$



$$F(d) - F(c) = ② = \int_c^d f(x)\,dx$$

Conclusione: se conosco $F(x)$ so calcolare l'integrale di $f(x)$ tra ogni coppia di estremi.

— o — o —

$\boxed{\text{TEO. MEDIA INTEGRALE}}$ Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\boxed{\text{CONTINUA}}$.

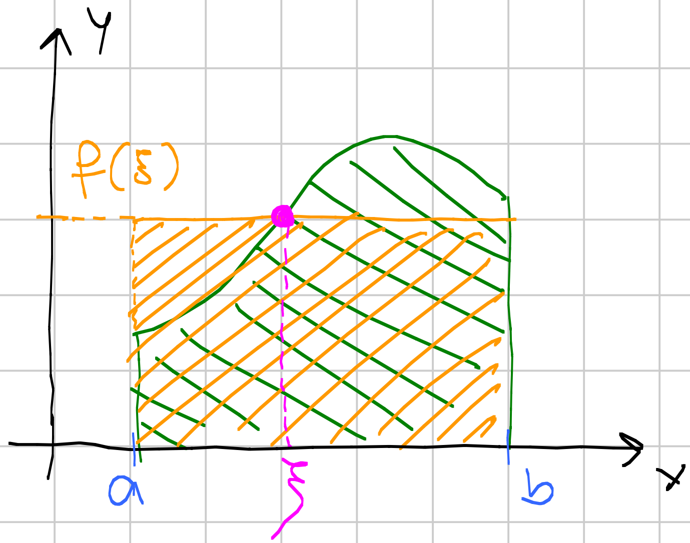
Allora esiste $\xi \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Significato geometrico

$f(\xi)\cdot(b-a)$ = area di un rettangolo che ha $[a,b]$ come base e $f(\xi)$ come altezza



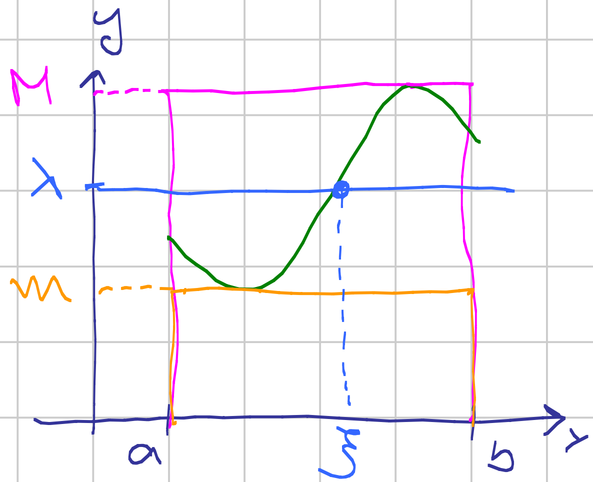
Teo. dice che esiste un rettangolo di altezza $f(\xi)$ la cui area è uguale all'area che sta sotto il grafico

$\boxed{\text{Dim.}}$ Siano m e M il max ed il min di $f(x)$ in $[a,b]$. Allora

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

$m(b-a)$ = Area rettangolo arancione

$M(b-a)$ = area rett. rosa



Divido per $(b-a)$

$$\underbrace{m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx}_{\text{numero } \lambda \text{ compreso tra il max ed il min di } f(x)} \leq M$$

Poiché f è continua, per il teo di esistenza degli zeri, esiste almeno un punto ξ in cui f vale λ.

— o — o —

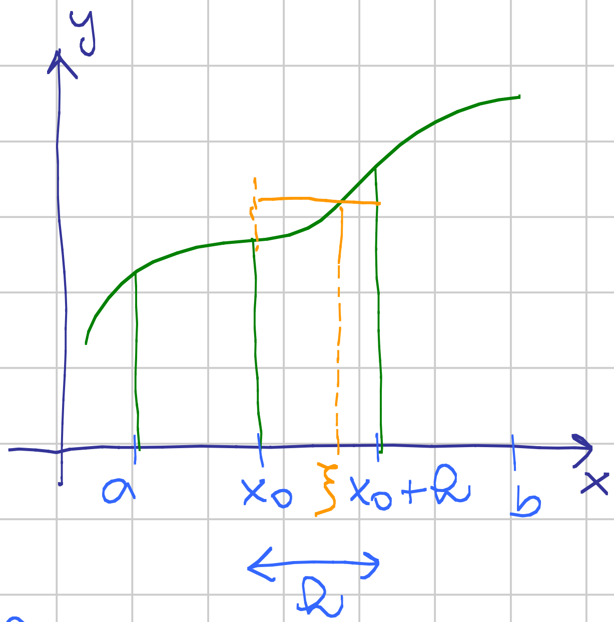
TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, e sia $F(x)$ la sua funzione integrale, cioè

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Allora F è derivabile e $\boxed{F'(x) = f(x)}$ per ogni $x \in [a,b]$.

Dim. Prendiamo $x_0 \in [a,b]$ e calcoliamo



$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\,dx$$

Teo. media integrale applicato nell' interv. $[x_0, x_0+h]$ $= f(\xi)$

DIPENDE DA h

$$x_0 \le \xi \le x_0+h$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$x_0 \qquad x_0 \qquad x_0$$

CARAB.

Quando $h \to 0$ succede

Quindi

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}}_{= F'(x_0)} = \lim_{\xi \to x_0} f(\xi) = f(x_0)$$

$\boxed{\text{PRIMITIVE}}$ Data una funzione $f(x)$ si dice PRIMITIVA una qualunque funzione $F(x)$ tale che

$$F'(x) = f(x)$$

$\boxed{\text{OSS.}}$ Ogni funzione CONTINUA ha una primitiva (per il teo. fond. del calcolo integrale basta prendere la funzione integrale).

Operativamente : ① Se so calcolare la funzione integrale so calcolare l'int. tra ogni coppia di estremi

② La funzione integrale è una primitiva

③ Se io trovo una $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$ posso dire di aver trovato la funzione integrale ?

NO! Le primitive sono tante a priori !!!! MA.....

$\boxed{\text{TEO.}}$ Due primitive della stessa funzione continua su un $\boxed{\text{intervallo } [a,b]}$ differiscono tra di loro per una costante.

Dim: siano $F_1(x)$ e $F_2(x)$ 2 primitive della stessa $f(x)$.
Allora

$$F_1'(x) = f(x) \qquad F_2'(x) = f(x)$$

$$(F_1 - F_2)'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

ma allora $F_1 - F_2$ è una costante.

Nota bene: se $g'(x) = 0$ in $[a,b]$, allora g è costante in $[a,b]$

Dato un qualunque punto $c \in [a,b]$

$$f(c) - f(a) = \underbrace{f'(\xi)}_{\overset{\shortparallel}{0}}(c-a)$$

$\Rightarrow$ in ogni punto c il valore $f(c)$ è uguale al $f(a)$

<u>Conclusione</u>: al posto della funzione integrale posso usare una qualunque primitiva per calcolare il valore di un integrale.

$$\int_c^d f(x)\,dx = F(d) - F(c) \qquad F = \text{funz. integrale}$$

Se uso un'altra primitiva $G(x)$, questa abbiamo detto che è della forma $G(x) = F(x) + k$ ← costante

$$G(d) - G(c) = F(d) + \cancel{k} - F(c) - \cancel{k} = \int_c^d f(x)\,dx$$

QUINDI: il calcolo degli integrali si riduce al calcolo di una primitiva di $f(x)$, cioè una funzione $F(x)$ tale che

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

↑ ANTIDERIVATIVE