MAT I TLC ORA 60-61 → MISSING

Titolo nota

$\boxed{\text{ORA 62}}$

22/11/2006

Teo. WEIERSTRASS : $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compatto (chiuso + limitato)
$f: A \to \mathbb{R}$ continua.
Sotto queste ipotesi esistono max e min di f in A.

Ricerca p.ti max / min

- p.ti staz. interni : $\nabla f = 0$
- p.ti sing. interni : ∇f N.E.
- Bordo di A
  - metodo PARAMETRIZZAZIONE
  - metodo dei MOLTIPLICATORI di LAGRANGE

Def. Sia $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. L'insieme

$$V = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \Phi(x,y) = 0 \}$$

l'equazione che descrive l'insieme V

si dice LUOGO DI ZERI della funzione Φ.

Esempio V = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1.

Equazione $x^2+y^2=1$ $\qquad \underbrace{x^2+y^2-1}_{\Phi(x,y)} = 0$

Teorema del moltiplicatore di LAGRANGE

Sia V il luogo di zeri di una funzione $\Phi(x,y)$. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Allora i p.ti di max/min della funzione f nell'insieme V si trovano in una delle seguenti 2 categorie

* soluzioni del seguente sistema (1° SISTEMA)

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

Questo sistema cerca i p.ti di V in cui $\nabla\phi$ si annulla

3 equazioni
2 incognite : (x, y)
$\Downarrow$
IN GENERE NON CI SONO SOLUZIONI

* punti di V in cui ∇f è multiplo di $\nabla\phi$, cioè

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi$$

$\uparrow$ NUMERO (il MOLTIPLICATORE)

Questo si riduce a risolvere il sistema (2° SISTEMA)

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \end{matrix}\right\} \nabla f = \lambda \nabla \phi$

$\left.\phi = 0\right\}$ stare in V

3 equazioni
3 incognite : x, y, λ
$\Rightarrow$ IN GENERE HA NUMERO FINITO DI SOLUZIONI

Operativamente. Stiamo considerando un problema di max/min.
Il bordo dell'insieme è un certo V con equazione $\phi(x,y)=0$.

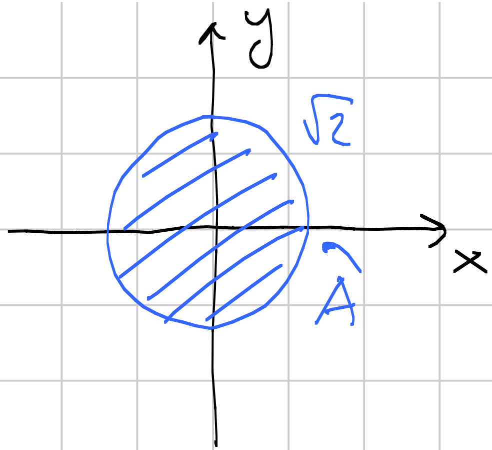
Risolvo il 1° sistema; le eventuali soluz. le metto fra i candidati ad essere p.ti di max/min.

PUNTI SINGOLARI SUL BORDO

Risolvo il 2° sistema: trovo varie terne x, y, λ. Dimentico il λ, e le coppie (x,y) risultanti le includo fra i candidati.

PUNTI STAZIONARI RELATIVAMENTE AL BORDO
(non sono p.ti in cui $\nabla f = 0$)

Esempio 1 $\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix} \left\{ \underbrace{x+2y}_{f(x,y)} : \underbrace{x^2+y^2 \le 2}_{\text{Descrizione insieme}} \right\}$



* W $\Rightarrow$ max e min esistono

* sing. interni : $\emptyset$

* staz. interni : $\nabla f(x,y) = (1,2)$
  non si annulla mai : $\emptyset$

* **bordo** : è la circonferenza di equazione $x^2+y^2=2$, cioè

$$\underbrace{x^2+y^2-2}_{\phi(x,y)}=0$$

Risolvo i 2 sistemi

$\boxed{1^\circ \text{ SISTEMA}}$

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \qquad \left.\begin{array}{l} \to x=0 \\ \to y=0 \end{array}\right\} \text{ INCOMP. con } 3^a \text{ eq.}$$

$\boxed{2^\circ \text{ SISTEMA}}$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

1^a eq $\to \quad x = \dfrac{1}{2\lambda}$ $\qquad$ 2^a eq. $\to \quad y = \dfrac{1}{\lambda}$

Sostituisco nella 3^a $\to \quad \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = 2 \Rightarrow \dfrac{5}{4\lambda^2} = 2$

$x^2 + y^2 = 2$

$$8\lambda^2 = 5 \qquad \lambda^2 = \frac{5}{8} \qquad \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

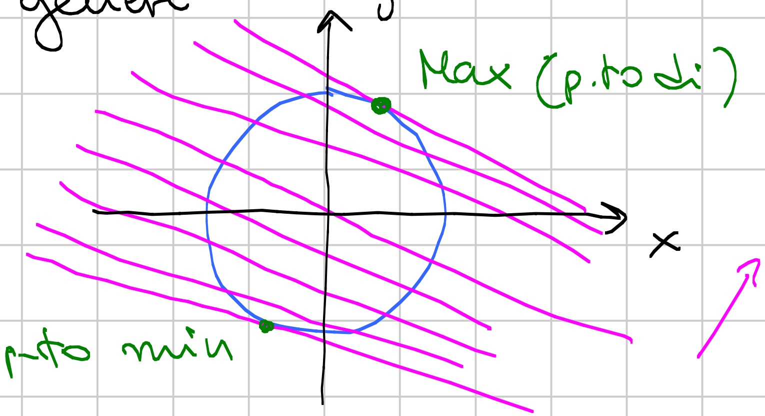
$$\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

I candidati sono $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

Uno sarà p.to di max, uno sarà p.to di min.

— o —

Con le linee di livello potevamo prevedere un comport. del genere



$$x + 2y = \lambda \qquad y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$

$\nearrow$ λ sale

Esempio 2 $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\} \quad f(x,y) = 3x^2 + y$

$$\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \{ f(x,y) : (x,y) \in A \}$$

W $\Rightarrow$ max e min esistono

$\nearrow$ staz. int. : $\nabla f(x,y) = (6x, 1) : \emptyset$

$\searrow$ sing. int. : $\emptyset$

Bordo : equazione del bordo $\quad \underbrace{x^2+y^2-1}_{\phi(x,y)} = 0$

$\boxed{1^\circ \text{ SISTEMA}}$

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Nessuna soluz.}$$

$\boxed{2^\circ \text{ SISTEMA}}$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 3\cancel{6}x = \cancel{2}\lambda x \\ 1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \leftarrow \text{NON SEMPLIFICARE LA } x$$

1ª eq. $\quad x(3-\lambda) = 0$

$x = 0$ $\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $y = \pm 1$ $\rightarrow$ $(0,1), (0,-1)$

Non serve nemmeno trovare λ

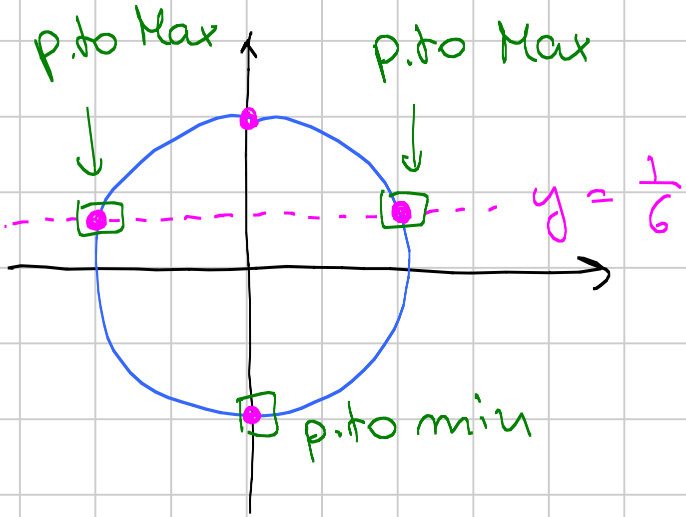
$\lambda = 3$ $\xrightarrow{2^a \text{ eq.}}$ $1 = 6y \Rightarrow y = \frac{1}{6}$

$\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $x^2 + \frac{1}{36} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{35}{36}$

$\Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{35}}{6}$

$\left(\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(-\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right) \leftarrow$

Ho ottenuto 4 candidati che vado a segnare nell'insieme A



$$f(0,1) = 1$$

$$f(0,-1) = -1$$

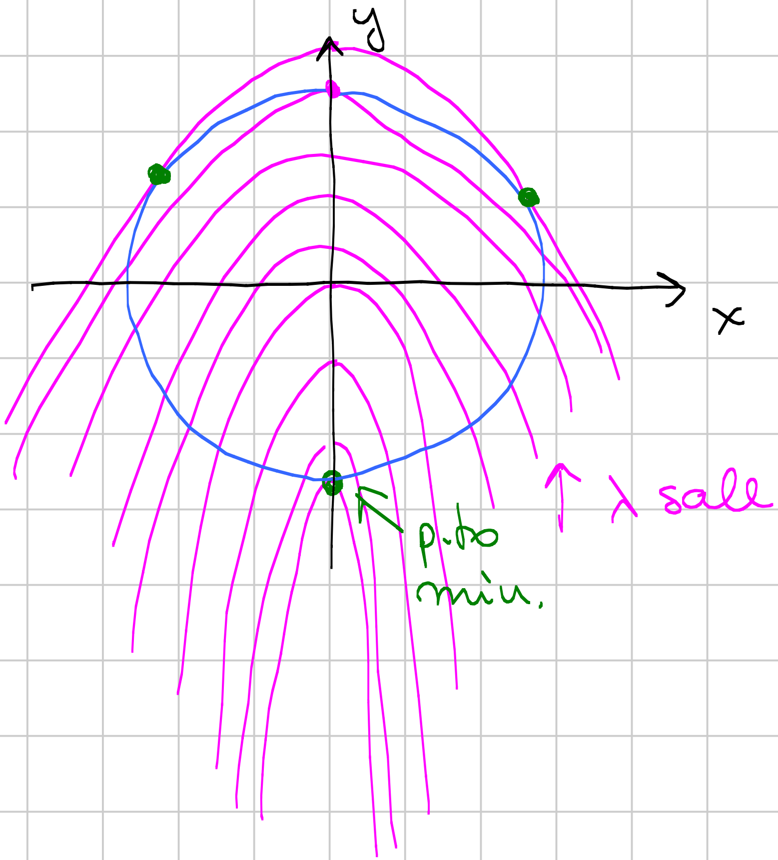
$$f\left(\pm\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right) = \cancel{3}\cdot\frac{35}{\cancel{36}\,12} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{35}{12} + \frac{1}{6} = \frac{37}{12}$$

$\max = \frac{37}{12}$ p.ti di max $\left(\pm\frac{\sqrt{35}}{6}, \frac{1}{6}\right)$

$\min = -1$ p.to di min $(0,-1)$

Con le linee di livello

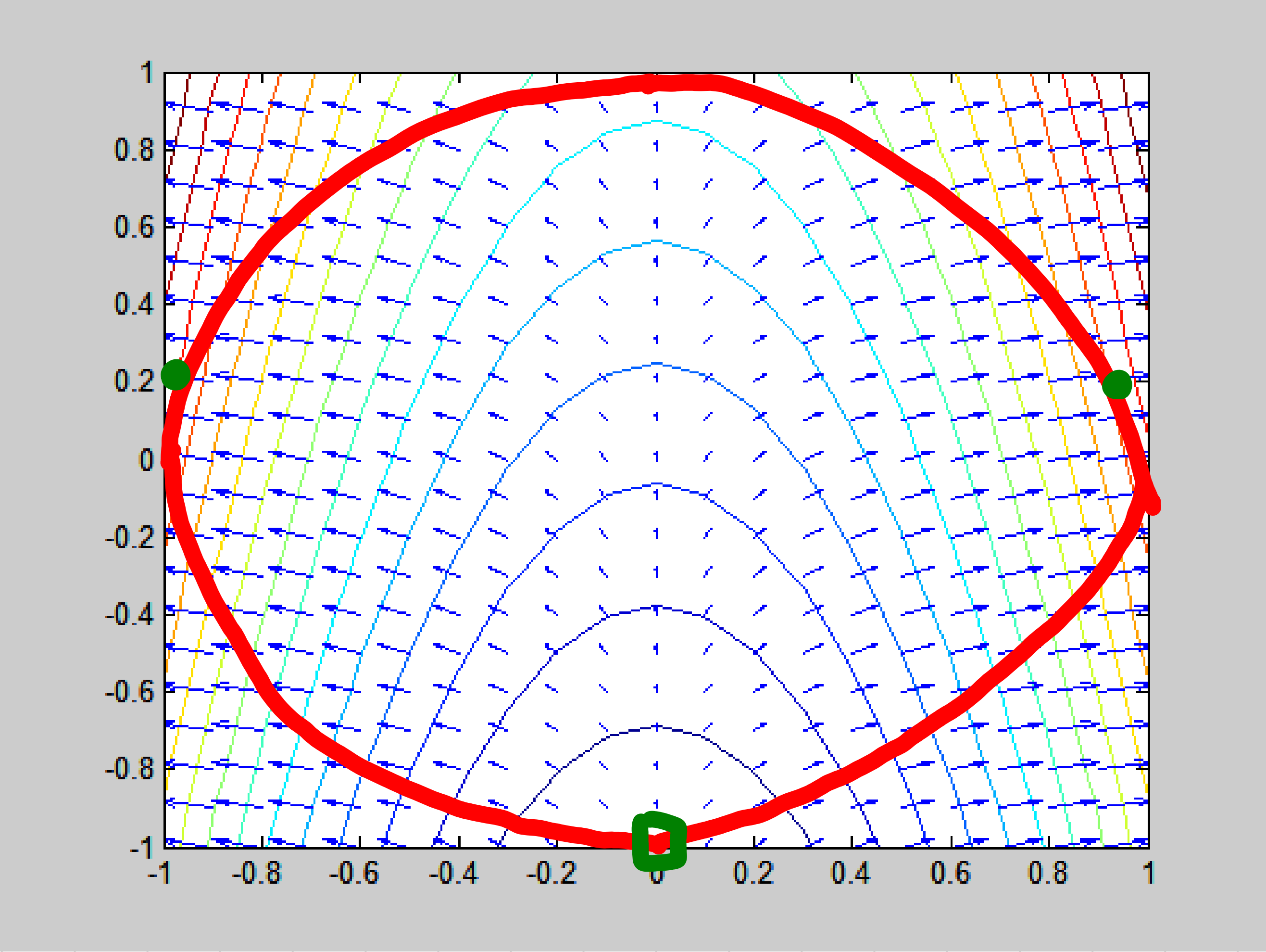


$$3x^2 + y = \lambda$$

$$y = \lambda - 3x^2$$

MAT I TLC

ORA 63



$\nabla f(x,y) =$

$= (6x, 1)$

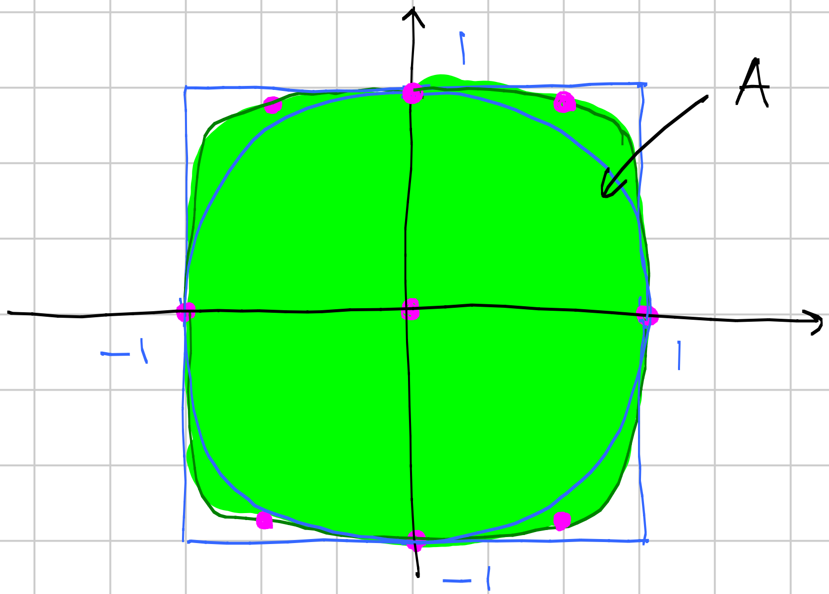
Esempio 3 $\quad f(x,y) = x^2+2y^2 \qquad A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^4+y^4 \le 1\}$

Come è fatto l'insieme A ? Si vede che

$$x\in[-1,1] \quad e \quad y\in[-1,1]$$

$\Rightarrow$ l'insieme A è contenuto nel quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$

$\Rightarrow$ A è limitato



Dico che il cerchio $\subseteq$ A

Sia infatti $(x,y)\in$ cerchio

$x^2+y^2\le 1$. Ma allora

$$x^4+y^4 \le x^2+y^2 \le 1$$

perchè x e y stanno in $[-1,1]$

Ogni punto del cerchio è anche punto dell'insieme A

Discorso analogo vale per gli insiemi

$x^k + y^k \leq 1$ con k esponente PARI

— o —

W ⇒ Max / min esistono

sing. int. : $\emptyset$; staz. int. : $\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$ ⇒ $\boxed{(0,0)}$

<u>Bordo</u> : è l' insieme di equazione $\underbrace{x^4 + y^4 - 1}_{\Phi(x,y)} = 0$

$\boxed{1^\circ \text{ SISTEMA}}$

$$\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{ NO SOLUZ.}$$

$\boxed{2^\circ \text{ SISTEMA}}$

$$\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{2}x = \overset{2}{\cancel{4}} \lambda x^3 \\ \cancel{4}y = \cancel{4} \lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(1 - 2\lambda x^2) = 0 \\ y(1 - \lambda y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

1ª eq. $\quad x(1 - 2\lambda x^2) = 0$

$\swarrow$ $x = 0$ $\qquad\qquad$ $\searrow$ $1 - 2\lambda x^2 = 0$

$x = 0 \xrightarrow{\text{3ª eq.}} y^4 = 1$, $\quad y = \pm 1$

$1 - 2\lambda x^2 = 0 \xrightarrow{\text{2ª eq.}} y(1 - \lambda y^2) = 0$

$\swarrow$ $y = 0$ $\qquad\qquad$ $\searrow$ $1 - \lambda y^2 = 0$

$$\boxed{(0,1),\ (0,-1)}$$

$\downarrow$ 3ª eq.

$x^4 = 1$

$x = \pm 1$

$$\boxed{(1,0),\ (-1,0)}$$

$x^2 = \frac{1}{2\lambda}$, $y^2 = \frac{1}{\lambda}$

$\downarrow$ 3ª eq.

$x^4 + y^4 = 1$

$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$

$\frac{5}{4\lambda^2} = 1 \qquad \lambda^2 = \frac{4}{5}$

$\lambda = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$

Se $\lambda = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $x^2 = \frac{1}{2\lambda} < 0$

$y^2 = \frac{1}{\lambda} < 0$ $\Rightarrow$ NO SOLUZ.

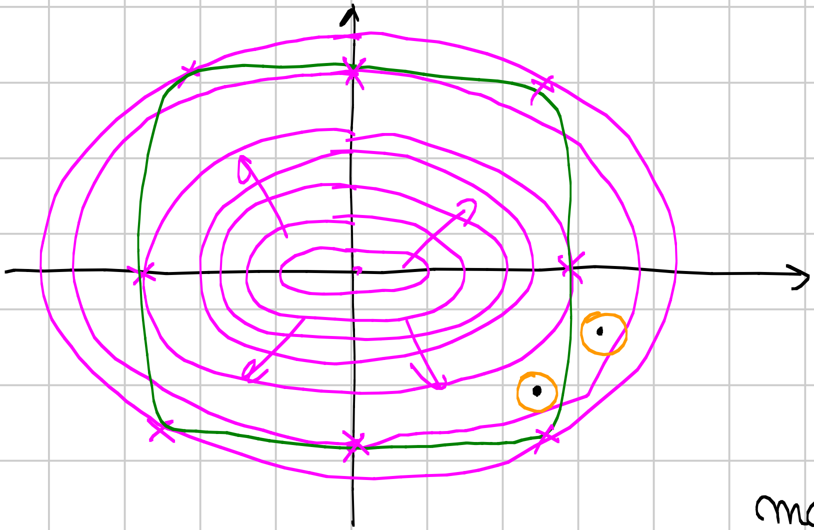
Se $\lambda = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $x^2 = \frac{\sqrt{5}}{4}$ $\Rightarrow$ $x = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{2}$

$y^2 = \frac{1}{\lambda} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ $\Rightarrow$ $y = \pm \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$

4 punti permutando i segni

Sostituendo si vede quali sono max/min.

linee di livello $x^2+2y^2=\lambda$ famiglia di ellissi



Perchè ero sicuro che il sistema 2° aveva almeno 2 soluzioni?

Consideriamo il problema

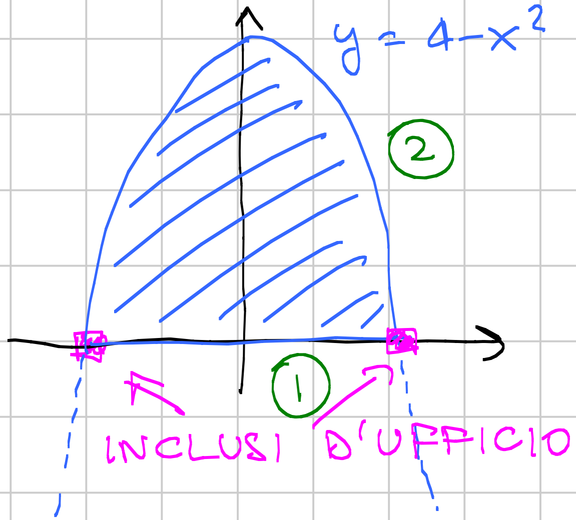
$$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}\left\{x^2+2y^2 : \underbrace{x^4+y^4=1}_{\text{L'insieme è il solo bordo}}\right\}$$

Il solo bordo è limitato ed è chiuso

W $\Rightarrow$ max e min sul bordo esistono $\Rightarrow$ devo avere almeno 2 soluzioni tra il 1° ed il 2° sistema.

Utilizzo misto di param. e moltiplicatori

$$\max_{\min} \left\{ x^2+y^2-2y \;:\; 0 \le y \le 4-x^2 \right\}$$



Uno vorrebbe:

↗ usare la param. sul pezzo 1

↘ usare i moltiplicatori sul pezzo 2 con eq. $\phi(x,y) = y + x^2 - 4 = 0$

Si può fare, $\boxed{\text{ma}}$

$\boxed{1°}$ bisogna scartare i candidati che vengono a trovarsi nella parte di parabola non compresa nel pezzo 2

$\boxed{2°}$ bisogna includere d'UFFICIO gli estremi del pezzo considerato (BORDO DEL BORDO)

Avremmo dovuto risolvere i sistemi

$\boxed{1^\circ \text{ SISTEMA}}$ ... $\Longrightarrow$ NO SOLUZIONI

$\boxed{2^\circ \text{ SISTEMA}}$ $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \cancel{2}x = \cancel{2}\lambda x \\ 2y - 2 = \lambda \\ y = 4 - x^2 \end{cases}$ $x(\lambda - 1) = 0$

$$x(\lambda - 1) = 0$$

$x = 0$ $\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $y = 4$ $\rightarrow$ $(0,4)$

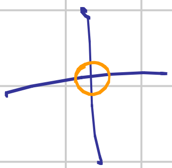
$\lambda = 1$ $\xrightarrow{2^a \text{ eq.}}$ $2y - 2 = 1$; $2y = 3$; $y = \frac{3}{2}$ $\xrightarrow{3^a \text{ eq.}}$ $x = \pm \dots$

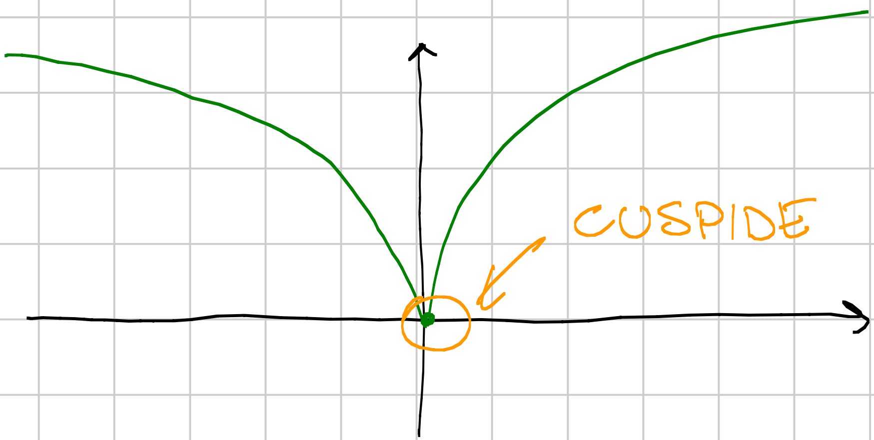
Esempio Boh? $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^3 = x^2\}$

$$\phi(x,y) = y^3 - x^2$$

$\boxed{\text{1° SISTEMA}}$ $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x = 0 \\ 3y^2 = 0 \\ y^3 = x^2 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ è soluzione del sistema

$y^3 = x^2$ $y = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ FUNZIONE PARI

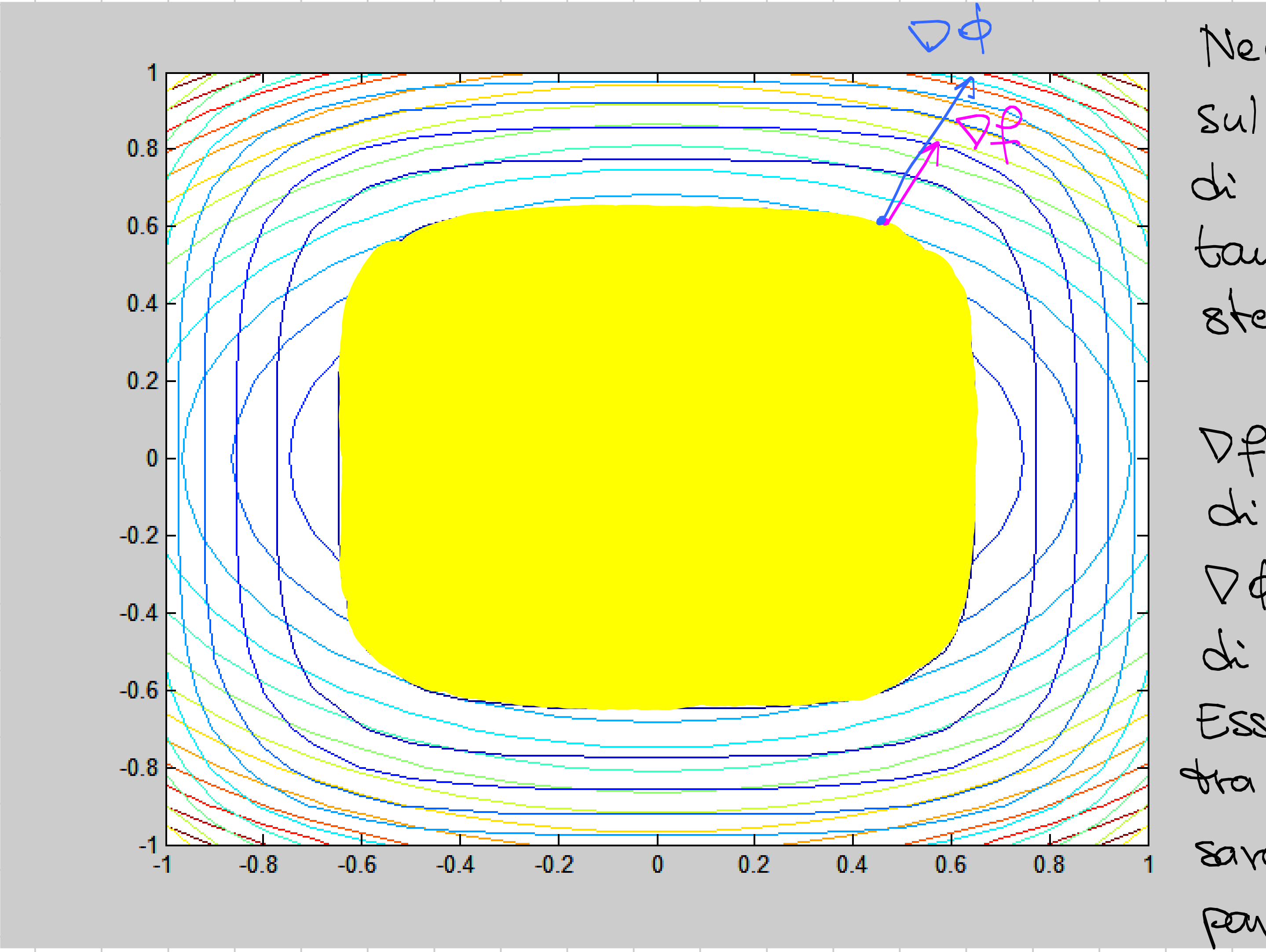




Brutalmente: le soluzione del 1° sistema di solito corrispondono a "bruttine" dell' insieme $\phi(x,y) = 0$

MAT I TLC

ORA 64



Nei p.ti di max / min sul bordo le linee di livello di f sono tangenti al bordo stesso

$\nabla f \perp$ linea di livello di f

$\nabla \phi \perp$ linea di livello di ϕ, cioè al bordo

Essendo $\perp$ a 2 linee tra di loro tangenti, saranno per forza paralleli

Cosa accade se A <u>NON</u> è limitato?

Weierstrass non vale +, quindi max / min possono anche non esistere. INF e SUP esistono comunque.

<u>Esempio 1</u> $f(x,y) = x^2+y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme) max N.E.
$\inf = \min = 0$ p.to di min $= (0,0)$
($f(0,0)=0$, $f(x,y)>0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$)

<u>Esempio 2</u> $f(x,y) = x^2-y^2$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme) Max e min N.E.
$\inf = -\infty$ ($x=0$, y enorme)

Esempio 3 $\quad f(x,y) = x^{63} + y^{36} \qquad A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme) $\qquad$ Max e min N.E.

$\inf = -\infty$ ($y=0$, x enormemente negativo)

Esempio 4 $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy \qquad A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme) $\qquad \inf = -\infty$ ($y=x$, x enorme)

$f(x,x) = x^2 + x^2 - 3x^2 = -x^2$

Esempio 5 $\quad f(x,y) = x^2 + y^2 + 5xy \qquad A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y=0$, x enorme)

$\inf = -\infty$ ($y=-x$, x enorme) $\rightsquigarrow$ diventa $x^2 + x^2 - 5x^2 = -3x^2$

Esempio 6 $f(x,y) = xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y = x$, x enorme) $\rightsquigarrow$ DIVENTA x^2

$\inf = -\infty$ ($y = -x$, x enorme) " $-x^2$

in alternativa ($y = 1$ ↗ x enorme ↘ x enorm. neg.)

Esempio 7 $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ $A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ... $\inf = \min = 0$ p.to di min : $(0,0)$

È ovvio che $f(0,0) = 0$. Devo dim. che $f(x,y) > 0$ per ogni $(x,y) \neq (0,0)$.

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2x \cdot \frac{y}{2} + \underbrace{\frac{y^2}{4} - \frac{y^2}{4}}_{\text{AGGIUNTO E TOLTO}} + y^2$$

$$= \left(x+\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$$

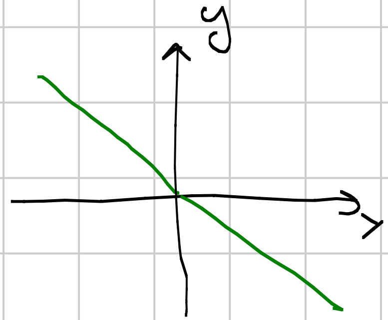
È chiaro che $f(x,y) \geq 0$ sempre ed è $=0 \iff$ i 2 termini sono $=0$, cioè se

$$\begin{cases} x+\frac{y}{2}=0 \\ y=0 \end{cases} \implies \text{l'unica soluz. è } (0,0)$$

<u>Esempio 8</u> $f(x,y) = x^2+2xy+y^2 \qquad A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$, $\inf = \min = 0$ p.ti di min: tutta la retta $y=-x$

$f(x,y) = (x+y)^2 = 0 \iff x+y=0 \iff y=-x$



Esempio 9 $\quad f(x,y) = e^x + e^y \qquad A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ($y = x$, x enorme) max N.E.

$\inf = 0$ min N.E.

① $f(x,y) > 0$ sempre $\quad e^x + e^y > 0 + 0 = 0$

② $y = x \rightsquigarrow$ DIVENTA $2e^x$ $\quad x$ enorm. neg.

Esempio 10 $\quad f(x,y) = x^2 + y^4 + x^2 y \qquad A = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ ... Provo $y = -x \rightsquigarrow$ DIVENTA $x^2 + x^4 - x^3$

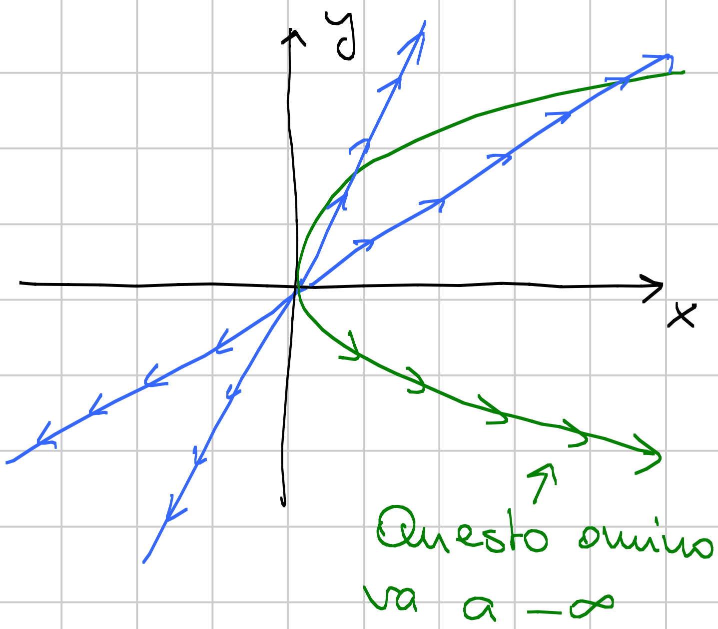
comanda x^4 per $x \to \pm\infty$

Provo + in generale $y = mx \rightsquigarrow$ DIVENTA $x^2 + m^4 x^4 - m x^3$

su ogni retta la funzione tende a $+\infty$ "dai 2 lati"

Prendo $x = y^2$ ... DIVENTA

$y^4 + y^4 + y^5$ prendo y enorm. neg. e vado a $-\infty$ perché comanda y^5



Esempio 11 $\quad f(x,y) = x^2 + y^4 + xy^2$

$\inf f = \min = 0 \qquad$ p.to di min : $(0,0)$

$$x^2 + xy^2 + y^4 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} - \frac{y^4}{4} + y^4$$

$$= \left(x + \frac{y^2}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} y^4 \geq 0 \quad \text{sempre}$$

PIANO TANGENTE

In 1 variabile

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h} + o(h)$$

$h = x - x_0$

$$\boxed{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

eq. retta tangente

In 2 variabili

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\,h + f_y(x_0, y_0)\,k + o(\quad)$$

$\downarrow h = x - x_0$ $\downarrow k = (y - y_0)$

EQ. PIANO TANGENTE

$$\boxed{z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$