MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA } 58}$

Titolo nota 18/11/2006

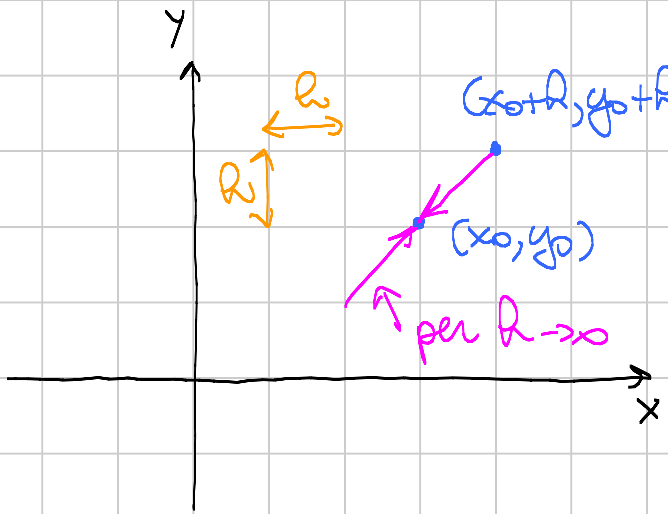
$f(x, y)$ $\qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x)$

numeri $\qquad$ vettore $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $\qquad$ numeri

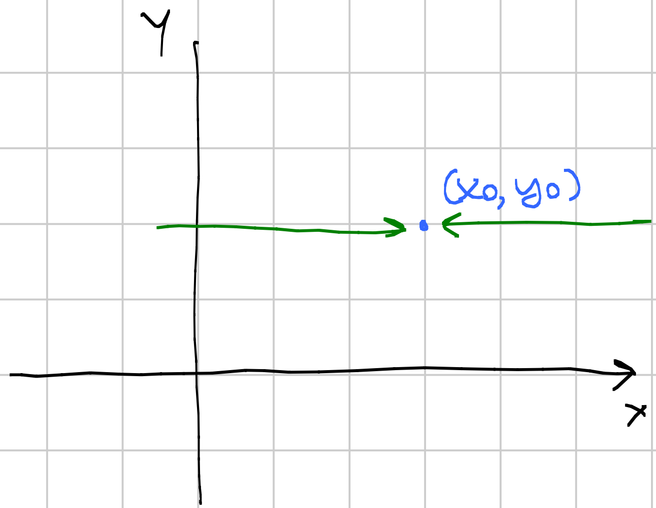
DERIVATE PARZIALI E DIREZIONALI

Sia $f(x, y)$ e sia $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



se esiste ed è reale si dice
DERIVATA PARZIALE RISPETTO A x
nel punto (x_0, y_0) e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad f_x(x_0, y_0).$$

Analogamente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$

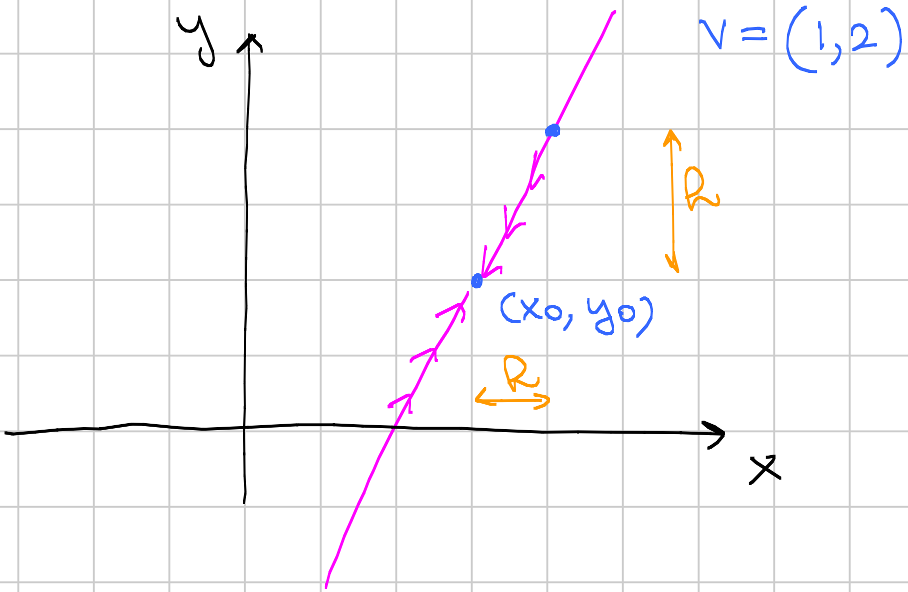
Più in generale posso fissare un ~~vettore~~ $V = (\alpha, \beta)$ $\quad \alpha^2+\beta^2 \neq 0$
e considerare

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+\alpha h, y_0+\beta h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

se esiste ed è $\in \mathbb{R}$ si dice

DERIVATA DI f LUNGO LA DIREZIONE v e si indica con

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$



Le derivate parziali sono esempi particolari di derivate direz.

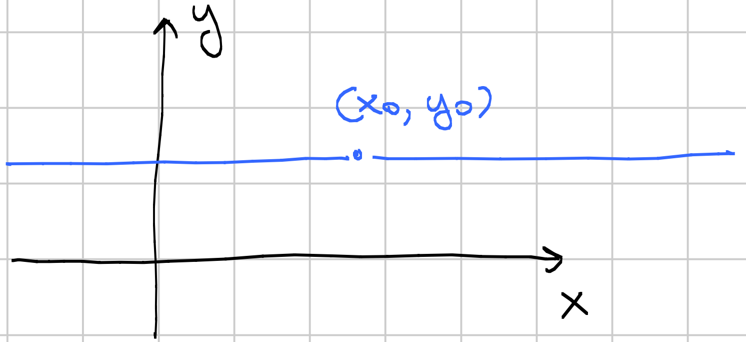
f_x è la derivata nella direzione data da $(1,0)$
f_y " " " " $(0,1)$

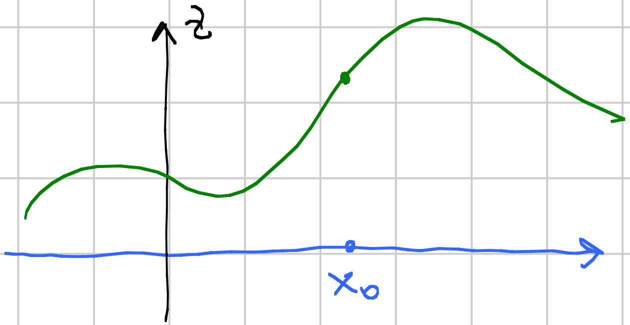
BASE CANONICA

Der. direz. in notazione vett. $x_0 \in \mathbb{R}^2$ (idem se $x_0 \in \mathbb{R}^k$ $f: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h}$$

Significato geometrico delle derivate parz. e direz.





La derivata parziale è la derivata nel punto x_0 della funzione di 1 variabile che rappresenta la quota di un omino che percorre sul grafico la linea passante per (x_0, y_0) e // asse x

— o — o —

Cosa succede se prendo $v = (2, 0)$?

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + 2h, y_0) - f(x_0, y_0)}{2h} \cdot 2 = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Conseguenza: le derivate direzionali + interessanti sono quelle corrispondenti a direzioni date da versori (tutte le altre sono semplicemente dei multipli)

— o — o —

Come si calcolano?

$$f(x,y) = x^2 + 3xy - 5y^4$$ $x^2 + 3kx - 5k^4$

$$f_x = 2x + 3y \qquad f_y = 3x - 20y^3$$

$$f_{xx} = 2, \quad \boxed{f_{xy} = 3}, \quad \boxed{f_{yx} = 3}, \quad f_{yy} = -60y^2$$

— o — o —

$$f(x,y) = x \sin y^2$$

$$f_x = \sin y^2 \qquad f_y = x \cdot \cos y^2 \cdot 2y = 2xy \cos y^2$$

$$f_{xx} = 0, \quad \boxed{f_{xy} = 2y \cos y^2}, \quad \boxed{f_{yx} = 2y \cos y^2}, \quad f_{yy} = 2x\left[y \cos y^2\right]'$$

$$= 2x\left[\cos y^2 - y \cdot \sin y^2 \cdot 2y\right]$$

A priori uno può aspettarsi che le derivate parz di una funz. di 2 variabili sono

deriv. prime → 2
" seconde → 4
" terze → 8
" k-esime → 2^k

e per una funz. di n variabili le deriv. k-esime sono
n^k

Teorema di inversione dell'ordine di derivazione. Nei casi decenti,

diciamo se f_{xy} e f_{yx} esistono e sono continue

si ha che $f_{xy} = f_{yx}$

Conseguenza Anche per una derivata k-esima di una funzione di n variabili quello che conta è quante volte si deriva rispetto a ciascuna variabile, e non l'ordine in cui si eseguono le derivate.

Esempio $\quad n=2 \quad k=4 \quad$ derivate quante. Quante e quali sono?

5

$$f_{xxxx} = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \qquad f_{yyyy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^4}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} = f_{xxxy} = f_{xxyx} = f_{xyxx} = f_{yxxx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} = f_{xyyy} = f_{yxyy} = f_{yyxy} = f_{yyyx}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = f_{xxyy} = f_{xyxy} = f_{xyyx} = f_{yxxy} = f_{yxyx} = f_{yyxx}$$

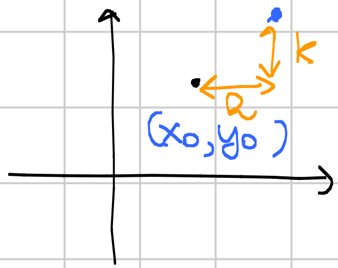
In generale le deriv. k-esime di una funz. di 2 variabili sono $k+1$ (risp. a x posso derivare $\underbrace{0, 1, 2, \dots, k}_{k+1 \text{ possibilità}}$ volte)

MAT I TLC

ORA 59

GRADIENTE, DIFFERENZIALE, PIANO TANGENTE

In 1 variabile $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$



In 2 variabili:

$$\boxed{f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}$$

Una funzione $r(h,k)$ è $o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$ se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

[Limite in 2 variabili]

Se succede la formula riquadrata si dice che f è differenziabile in (x_0, y_0).

N.B. In più variabili può succedere che una funzione $f(x,y)$ abbia in un p.to (x_0, y_0) tutte le derivate parziali e direzionali, ma tuttavia non sia differenziabile e neppure continua in (x_0, y_0).

— o — o —

GRADIENTE Il gradiente di f nel p.to (x_0, y_0) è il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f nel punto

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)\right)$$

NABLA

$$\boxed{f(x_0+h,\, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \underbrace{f_x(x_0,y_0)h + f_y(x_0,y_0)k}_{\substack{\shortparallel \\ (f_x,\, f_y)\,\cdot\,(h,k)}} + o\big(\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\|(h,k)\|}\big)}$$

$(f_x, f_y) = \nabla f$

$\cdot$ ← prod. scalare

Riscriviamo tutto in notazione vettoriale.

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$ $\quad h = (h_1, \dots, h_n)$ incremento

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\nabla f(x_0)}_{\text{GRADIENTE}} \cdot h + o(\|h\|)$$

$\cdot$ ← prod. scalare tra vettori n-dimensionali

GRADIENTE E DERIVATE DIREZIONALI

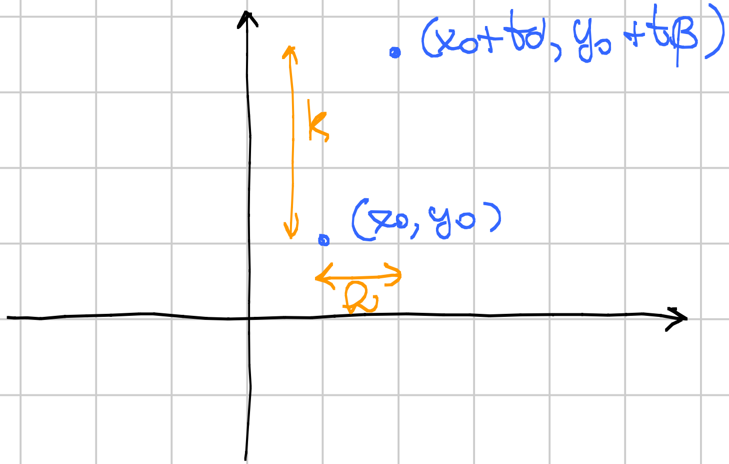
$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + f_x(\,)h + f_y(\,)k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

Quando mi muovo nella dir. data da $v = (\alpha, \beta)$
ho che $h = t\alpha$ $k = t\beta$ (con t che poi tenderà a 0)

$$f(x_0+t\alpha, y_0+t\beta) = f(x_0,y_0) +$$

$$+ f_x(\,)t\alpha + f_y(\,)t\beta$$

$$+ o(t)$$



$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t\alpha, y_0+t\beta) - f(x_0,y_0)}{t} = f_x(x_0,y_0)\alpha + f_y(x_0,y_0)\beta$$

$$(f_x, f_y)\cdot(\alpha,\beta)$$

Note le derivate parziali e la direzione v, posso calcolare la derivata nella direz. v.

In notaz. vettoriale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v$$

prod. scalare

$$= \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$$

angolo compreso

prodotti di numeri

Limitiamoci alle direzioni date dai versori $\|v\| = 1$.
La deriv. direz. dipende SOLO dal coseno dell'angolo compreso

In particolare: $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è MASSIMA quando $\cos\theta = 1$, cioè quando $\theta = 0$, cioè quando la dir. v è // al gradiente con lo stesso verso;

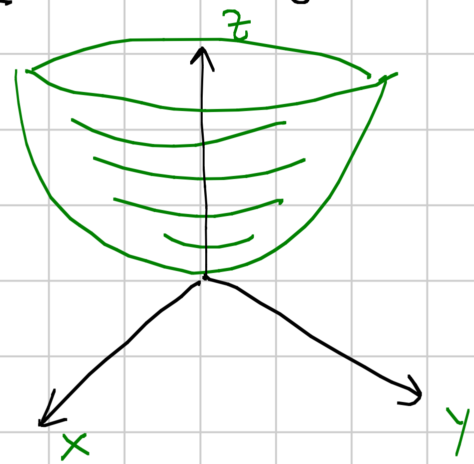
$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$ è MINIMA quando $\theta = 180°$, cioè quando v è parallelo al gradiente, ma nella direz. opposta

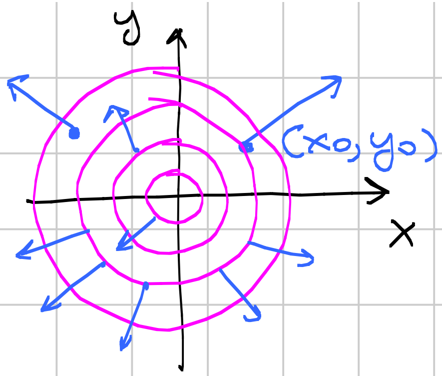
$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = 0$ quando $v \perp \nabla f$.

perp.

$\boxed{\text{SIGNIFICATO GEOMETRICO DEL GRADIENTE}}$ È la direzione andando nella quale la funzione sale maggiormente

Esempio 1 $\quad f(x,y) = x^2 + y^3$





Come sono messi gradiente e linee di livello?

∇f è $\perp$ alle linee di livello e punta nella direzione in cui λ sale

$\nabla f(0,0) \qquad \nabla f(x,y) = (2x, 2y) \qquad \nabla f(0,0) = (0,0)$