MAT I TLC

ORA 55

Titolo nota 16/11/2006

VETTORI n-DIMENSIONALI

$\mathbb{R}^n$ $\quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n \quad \vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$

vettore

componenti (sono numeri)

$(1,2,3) \neq (1,3,2)$

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \qquad \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

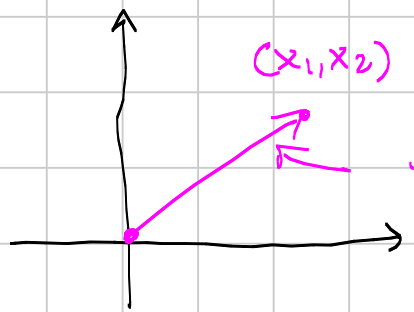
$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ somma di 2 vettori

$\lambda \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ prodotto di un numero λ per un vettore $\vec{x}$: viene un vettore

NORMA DI UN VETTORE

$$|\vec{x}| = \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$ = lunghezza del vettore

$\boxed{n=2}$



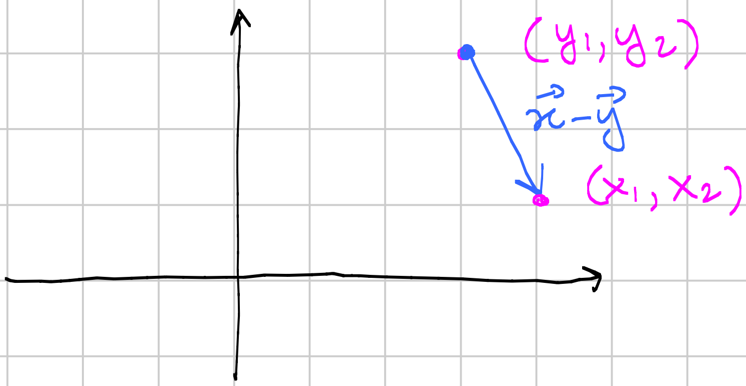
lungh = $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

DISTANZA TRA 2 VETTORI

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

$$= \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

$\vec{x} - \vec{y} = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$



lungh. di $\vec{x}-\vec{y}$ = norma di $\vec{x}-\vec{y}$
= dist $(\vec{x},\vec{y})$

PRODOTTO SCALARE

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

$(\vec{x}, \vec{y})$ //

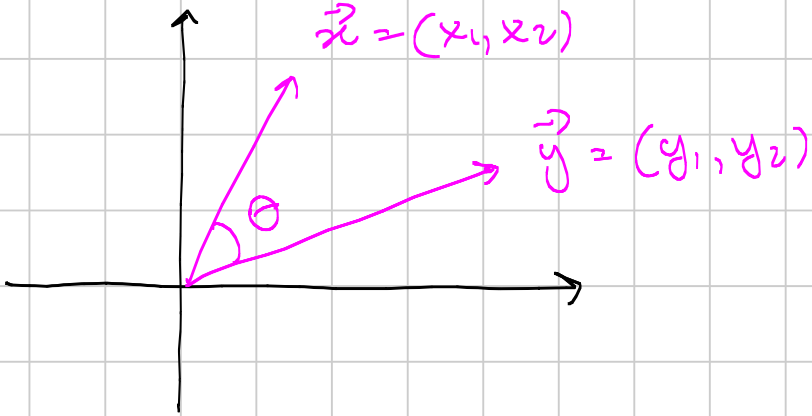
Il prodotto scalare ha in INPUT 2 vettori
e il risultato è un numero

SIGNIFICATO GEOMETRICO

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$$

← angolo compreso tra i 2 vettori

prod. scal, prod. numeri

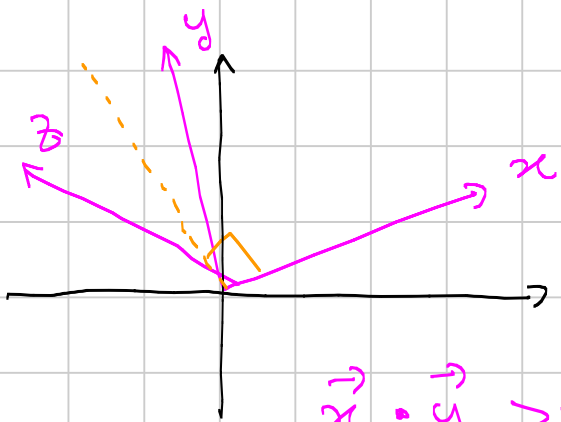


Conseguenze:

2 vettori non nulli sono perpendicolari $\iff \cos\theta = 0$
$\iff$ il prodotto scalare è $= 0$.

$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0 \iff$ l'angolo compreso è $< 90°$

$\vec{x} \cdot \vec{y} < 0 \iff$ l'angolo compreso sta tra $90°$ e $180°$



$\vec{y} \cdot \vec{z} > 0$

$\vec{x} \cdot \vec{y} > 0$, $\vec{x} \cdot \vec{z} < 0$

VERSORI Un versore è un vettore di lunghezza 1.

In generale, se $\vec{x}$ è un vettore non nullo $\vec{x} \neq \vec{0} = (0, \dots, 0)$ allora

$$\frac{\vec{x}}{\|x\|} \text{ è un versore}$$

Legame tra norma e prodotto scalare

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_2 + \dots + x_n \cdot x_n}$$

$$= \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}}$$

<u>Proprietà del prodotto scalare</u> (seguono dalla def.)

$$\vec{x} \bullet (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{z} \qquad \vec{x} \bullet \vec{y} = \vec{y} \bullet \vec{x}$$

$$\vec{x} \bullet (\lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x} \bullet \vec{y})$$

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y})$$

$$= \vec{x}\cdot\vec{x} + \vec{x}\cdot\vec{y} + \vec{y}\cdot\vec{x} + \vec{y}\cdot\vec{y}$$

uguali

$$= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\,\vec{x}\cdot\vec{y}$$

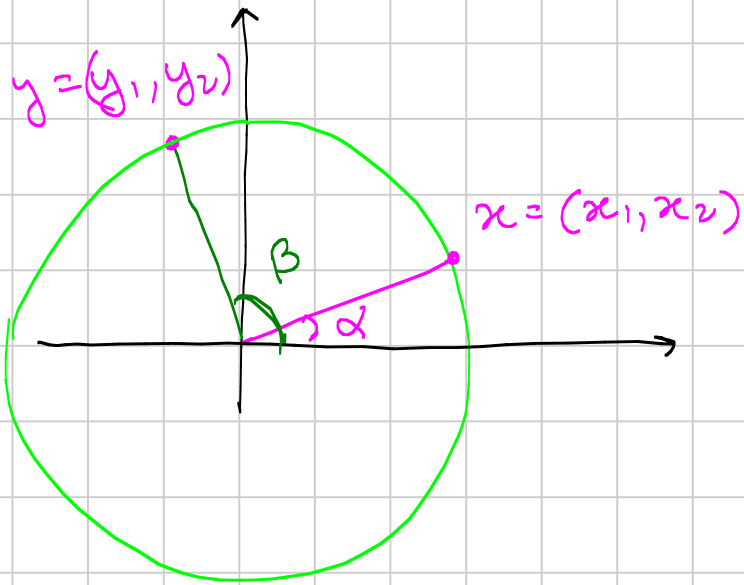
Dim. nel caso $n=2$ della formula $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta$

Posso dividere per $\|x\|$ e $\|y\|$

$$\frac{\vec{x}}{\|x\|}\cdot\frac{\vec{y}}{\|y\|} = \cos\theta$$

versori

basta dunque dimostrare che il prodotto scalare di 2 versori è $\cos\theta$



$x_1 = \cos\alpha\ ,\quad x_2 = \sin\alpha$

$y_1 = \cos\beta\ ,\quad y_2 = \sin\beta$

$$\vec{x} \circ \vec{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2$$
$$= \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$$
$$= \cos(\underbrace{\beta - \alpha}_{\text{Angolo compreso tra i 2 vettori}})$$

— o — o —

Funzione di 2 o più variabili

$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (2 variabili in partenza, 1 in arrivo)

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Notazione con le componenti

$f(\underbrace{x, y}_{\text{componenti}}) = x^2 + 3xy$, $f(x, y, z) = \dots$

numeri

Notazione vettoriale

$f : \mathbb{R}^{18} \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(\vec{x})$ oppure anche $f(x)$

vettore vettore

Si intende che $x \in \mathbb{R}^{18}$ $x = (x_1, x_2, \dots, x_{18})$

numeri

$$\boxed{\text{GRAFICI}}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ $\text{GRAFICO}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \ y = f(x)\}$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad$ " $\quad = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad$ " $\quad = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : w = f(x,y,z)\}$

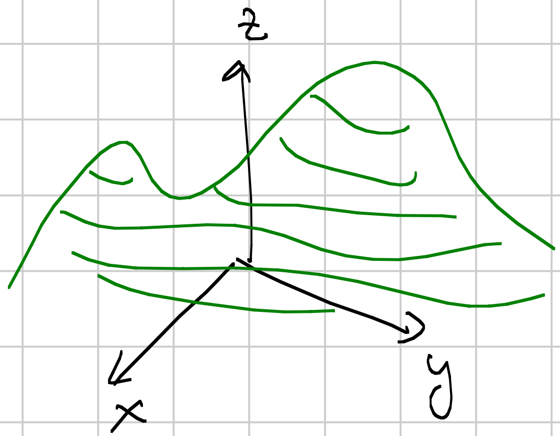
$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad$ " $\quad = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} ; \ x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)\}$

MAT I TLC

ORA 56

Grafici di funzioni di 2 variabili, linee di livello, restrizioni a rette

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x,y) = x^2+y^2$



Insieme di partenza si identifica con il piano base xy.
Su ogni punto del piano base c'è un punto del grafico situato ad una quota data da $f(x,y)$

il grafico è una superficie in $\mathbb{R}^3$ tale che per ogni p.to del piano base esiste un unico p.to del grafico che gli sta sopra / sotto.

Linee di livello

Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ cerco tutti i punti (x,y) tali che $f(x,y) = \lambda$.

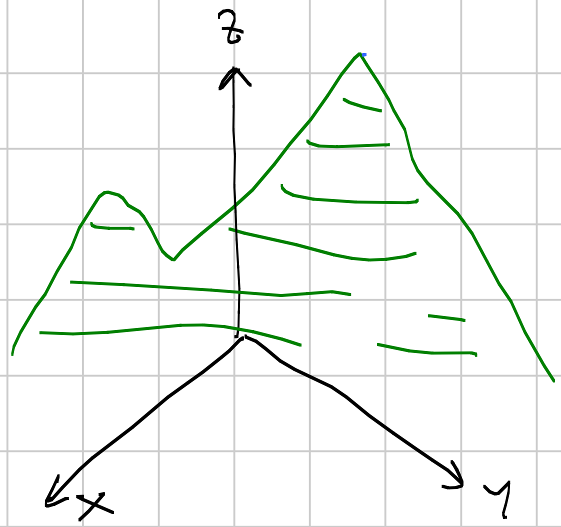
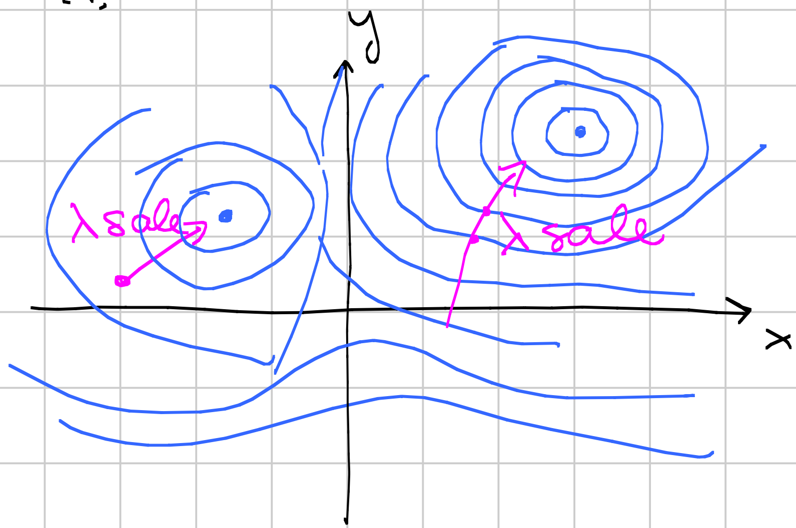


GRAFICO IN $\mathbb{R}^3$

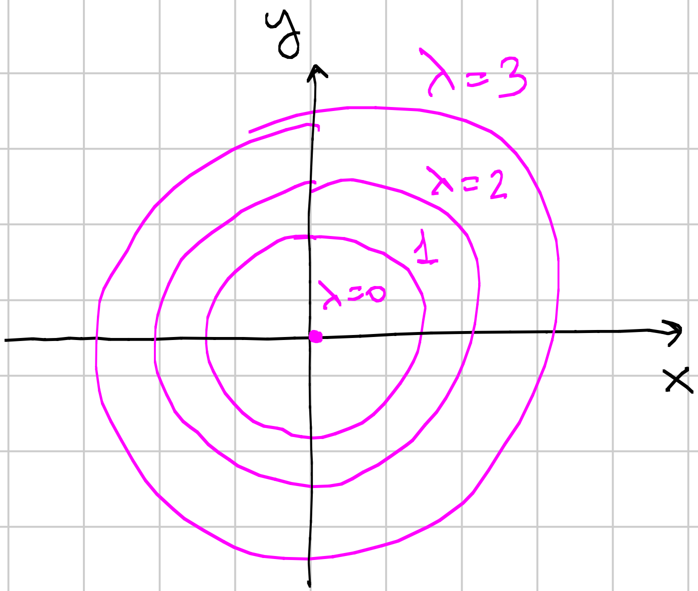


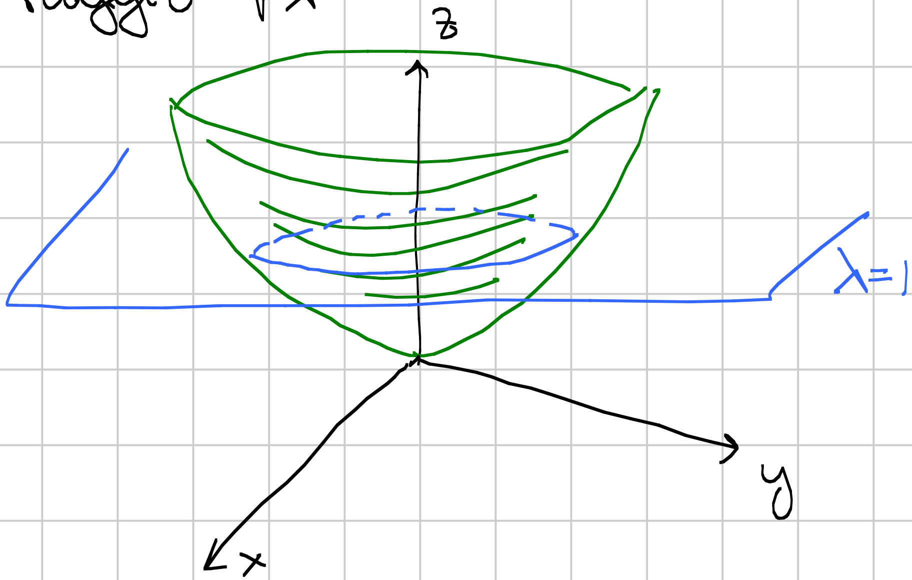
Linee di livello $\leftrightsquigarrow$ intersecare il grafico con piani paralleli al piano base ad altezza λ

Nel caso $f(x,y) = x^2+y^2$ i livelli sono dati da

$$x^2+y^2=\lambda$$

- per $\lambda<0$ non c'è nulla
- per $\lambda=0 \Rightarrow x^2+y^2=0 \Rightarrow$ solo punto $(0,0)$
- per $\lambda>0$ $x^2+y^2=\lambda$ è la circ. con centro in $(0,0)$ e raggio $\sqrt{\lambda}$





Esempio 2 $\quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

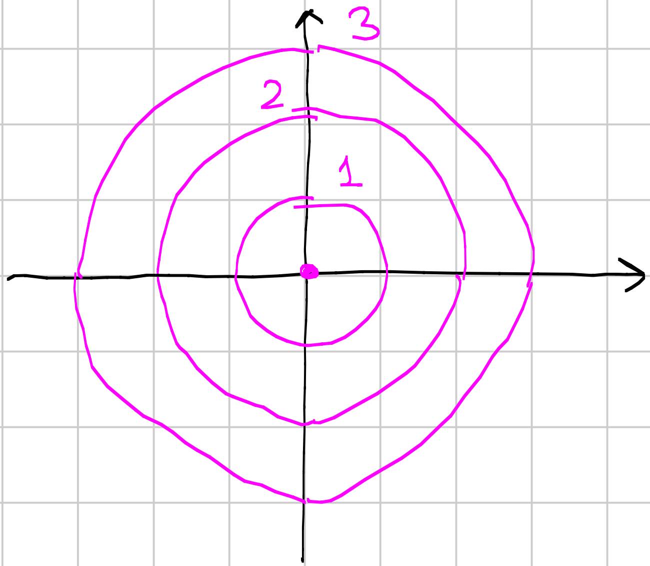
Linee di livello $\quad f(x,y) = \lambda$

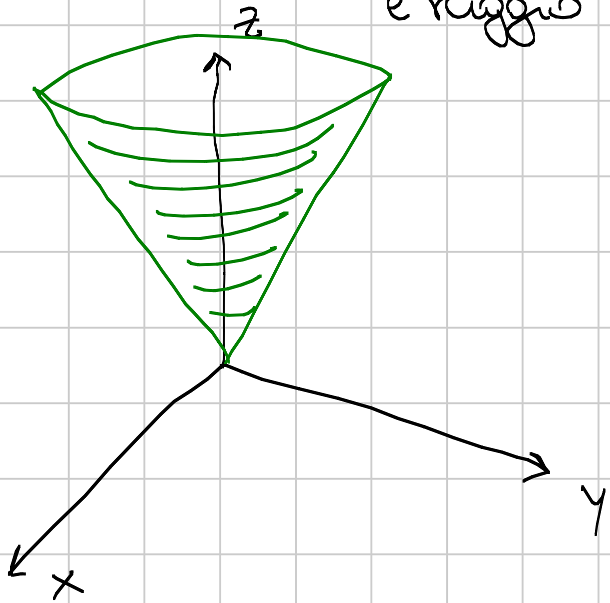
$$\sqrt{x^2+y^2} = \lambda$$

$\lambda < 0 \Rightarrow$ nulla

$\lambda = 0 \Rightarrow x^2+y^2 = 0 \Rightarrow$ solo $(0,0)$

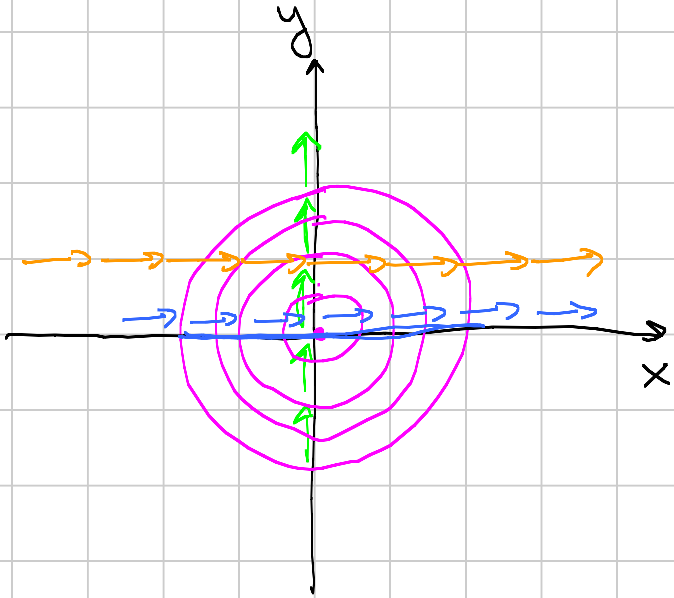
$\lambda > 0 \Rightarrow x^2+y^2 = \lambda^2 \Rightarrow$ circ. con centro $(0,0)$ e raggio λ

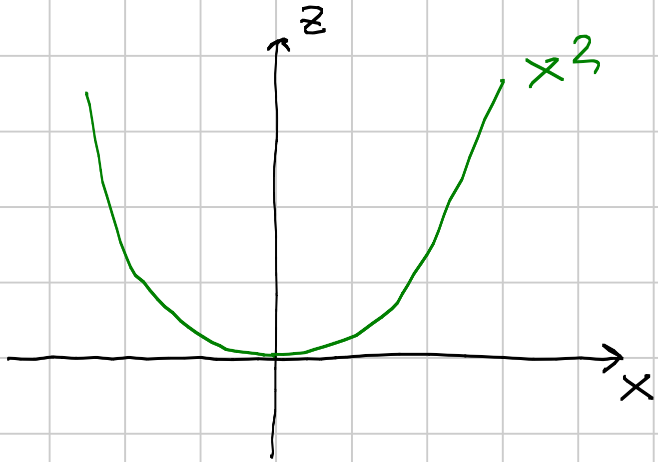




Restrizioni a rette

$f(x,y) = x^2 + y^2$





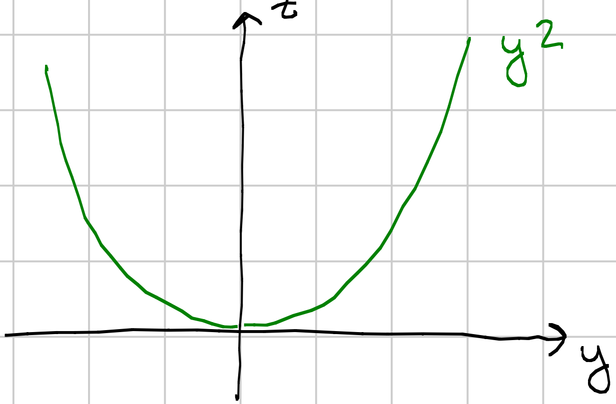
Sto restringendo la funzione $f(x,y)$ all'asse x

Sto quindi considerando $f(x,0) = x^2$

sono sull'asse x

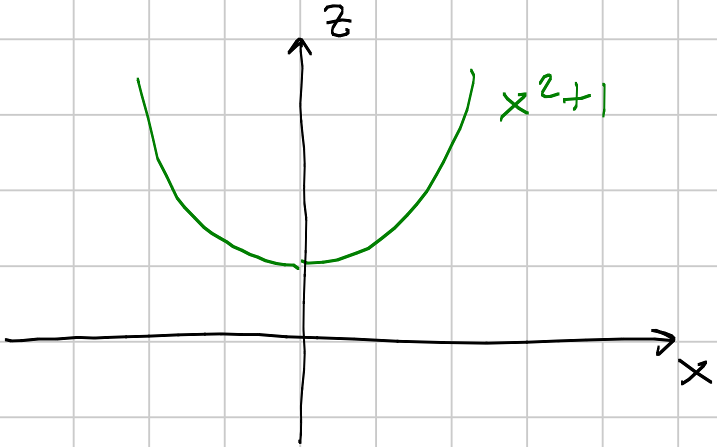
Se percorro l'asse y algebricamente considero

$$f(0,y) = y^2$$



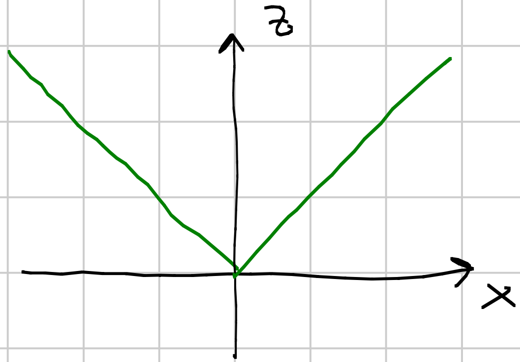
L'omino arancione percorre la retta $y=1$, quindi la sua quota è data da

$$f(x,1) = x^2+1$$



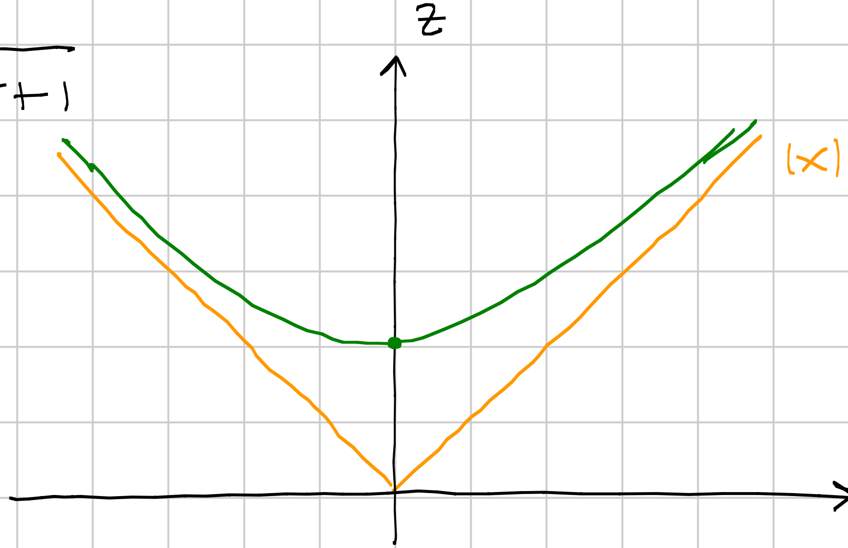
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ omino percorre asse x

$f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$

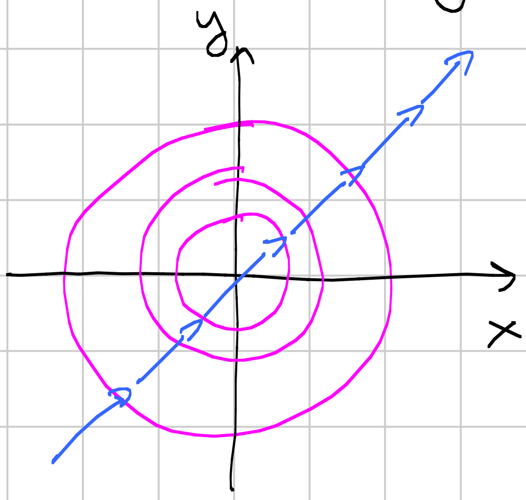


$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ omino percorre la retta $y=1$

Devo fare $f(x,1) = \sqrt{x^2+1}$



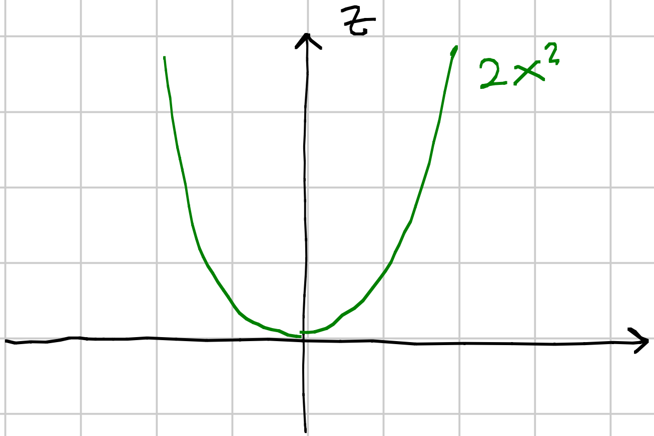
$f(x,y) = x^2 + y^2$



minimo lungo bisettrice I e III quadr.

La retta è $y = x$, quindi

$f(x,x) = x^2 + x^2 = 2x^2$



MAT I TLC

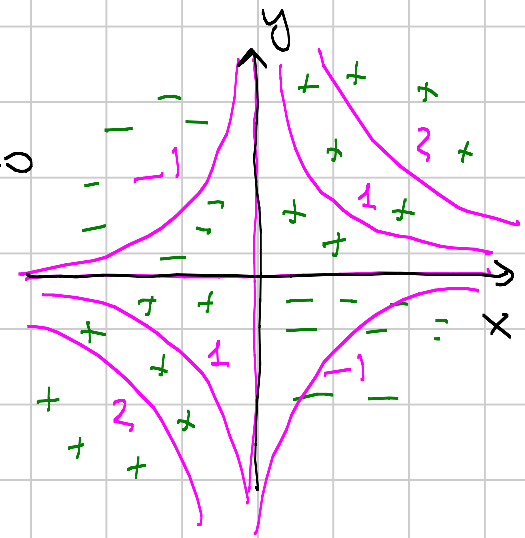
$\boxed{\text{ORA 57}}$

$f(x,y) = xy$ linee di livello $xy = \lambda$

per $\lambda = 0 \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0$ oppure $y = 0$

il livello $\lambda = 0$ sono i 2 assi

$xy = \lambda > 0$ $\quad$ $xy = \lambda < 0$



Omino che percorre asse x : $f(x,0) = 0$ quota costante

Omino lungo bisettrice $y = x$: $f(x,x) = x^2$

Limiti per funzioni di 2 variabili

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \begin{cases} l \in \mathbb{R} \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{N.E.} \end{cases}$$

NdP

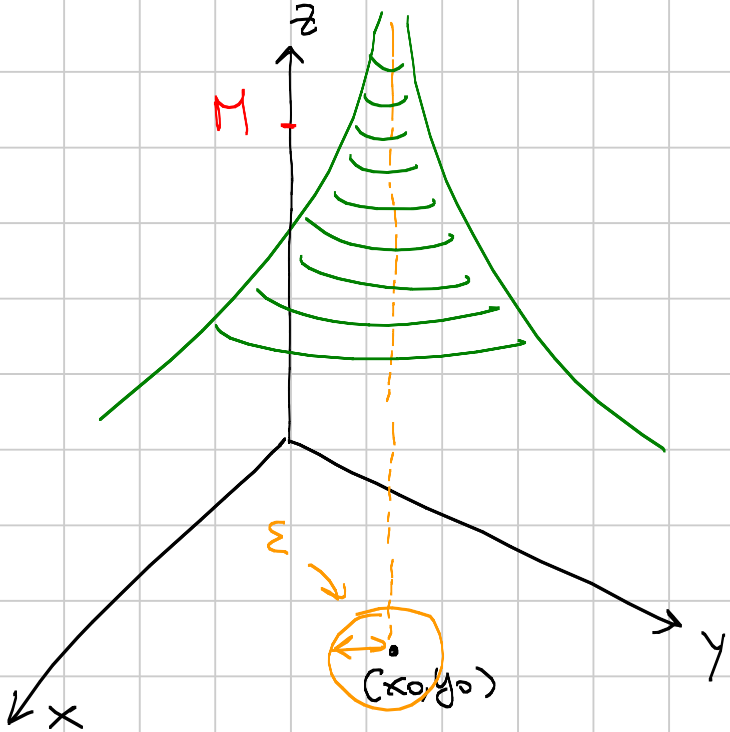
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$$

$\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme) $\exists\, \varepsilon > 0$

t.c.

$$f(x,y) \geq M$$

per ogni $(x,y) \in$ cerchio con centro (x_0, y_0) e raggio ε tranne al + il centro



Il cerchio di solito si indica con

BALL

$$B_\varepsilon(x_0, y_0) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}((x,y),(x_0,y_0)) \leq \varepsilon \}$$

vettore

In notazione vettoriale, indico il centro con $x_0 \in \mathbb{R}^2$

posso mettere anche n

$$B_\varepsilon(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \| x - x_0 \| \leq \varepsilon \}$$

vett. vett. vett. numero

Definizione di $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = +\infty$ ridetta in forma vettoriale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{se} \quad \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \varepsilon > 0 \ \text{t.c.}$$

$$f(x) \geq M \quad \forall x \ \text{t.c.} \ 0 < \| x - x_0 \| \leq \varepsilon$$

FUNZIONE CONTINUA: una funzione $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è continua nel punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Tutte le funzioni ottenute a partire da x e y e facendo operaz. alg., composizioni, ... sono continue dove non presentano problemi burocratici

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x + 3e^{xy} - \cos y}{5 + \arctan(x+y)} = \frac{2}{5}$$

Non ci sono problemi burocratici, quindi basta sostituire $(0,0)$

Esempio 1

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2+y^2} \qquad \left[\frac{0}{0}\right]$$

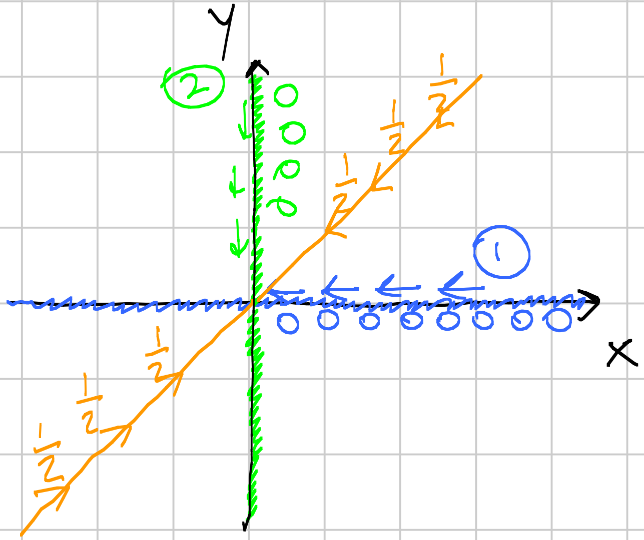
$$\underbrace{0}_{\downarrow\ 0} \le \underbrace{\overbrace{\boxed{\frac{x^2}{x^2+y^2}}}^{\text{Frazione } \le 1} \cdot y^4}_{\text{Carab.}\ \downarrow\ 0} \le \underbrace{y^4}_{\downarrow\ 0}$$

posso sostituire

MORALE: in più variabili "i limiti hanno pochissima voglia di esistere"

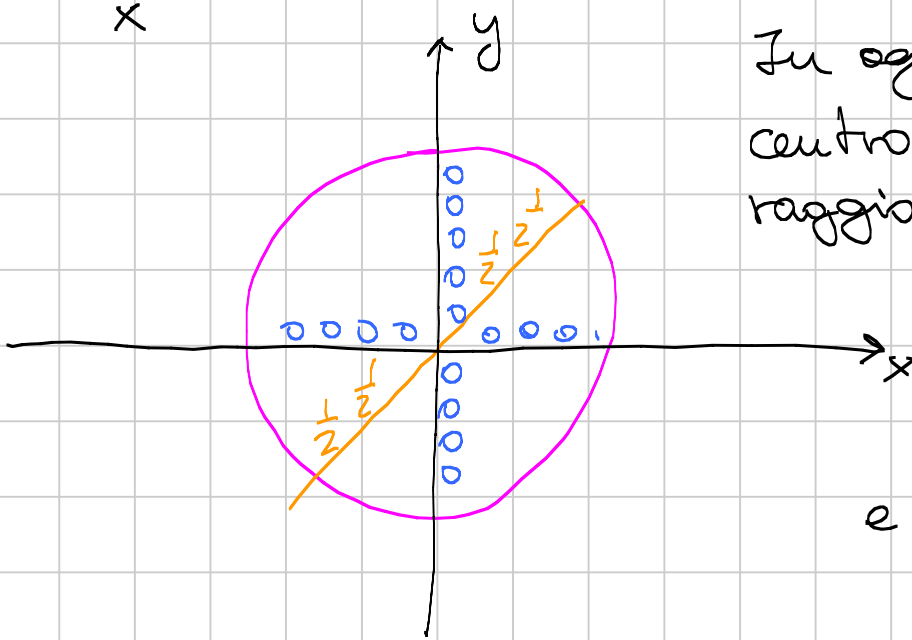
Esempio 2

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$$



Omino 1 vede $f(x,0) = 0$

Omino 3 vede $f(x,x) = \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$



In ogni cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio anche piccolissimo ci sono sempre p.ti in cui $f=0$ e punti in cui $f = \frac{1}{2}$