MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 52}}$

Titolo nota 15/11/2006

Succ. per ricorrenza $\boxed{\text{SPIRALEGGIANTI}}$

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1} \qquad a_0 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{2}{\frac{1}{2}+1} = \frac{4}{3}$$

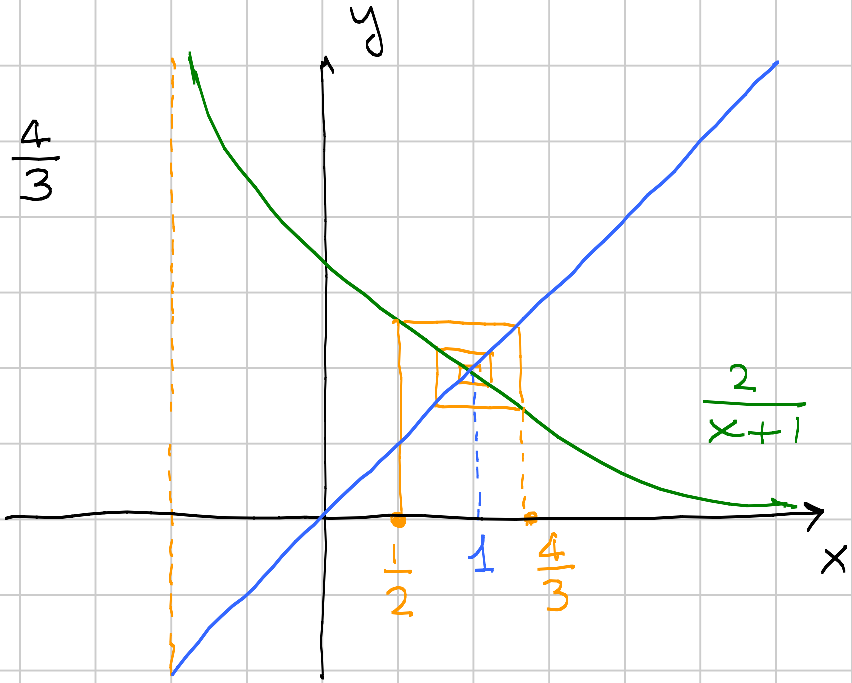
$$f(x) = \frac{2}{x+1}$$

$$f(x) = x \; ; \quad \frac{2}{x+1} = x$$

$$2 = x^2 + x \; ; \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = \begin{cases} -2 \\ 1 \end{cases}$$



Idea: $a_n \to 1$ "spiraleggiando"

$\boxed{\text{PIANO}}$

$\boxed{\text{PIANO DELLE 2 SOTTO SUCC.}}$

(i) $\frac{1}{2} \le a_n \le \frac{4}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$] Induzione oppure utilizzo della funzione

(ii) $a_{2n+2} \ge a_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ [la s.succ. dei pari è cresc.]

$a_{2n+3} \le a_{2n+1}$ [la s.succ. dei dispari è decr.]

(iii) $a_{2n} \to \ell \in \mathbb{R}$

$a_{2n+1} \to m \in \mathbb{R}$] SOLITO TEO. SUCC. MONOTONE

(iv) $\ell = m = 1$

$\boxed{\text{Dim di (iv)}}$

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + 1}$$

Non si può passare al limite come nel caso monotono

$$a_{2n+1} = \frac{2}{a_{2n}+1} \qquad a_{2n+2} = \frac{2}{a_{2n+1}+1}$$

$$m = \frac{2}{\ell+1} \qquad \ell = \frac{2}{m+1}$$

Ho ottenuto il sistema $\begin{cases} m = \dfrac{2}{l+1} \\ l = \dfrac{2}{m+1} \end{cases}$ $\begin{cases} lm + m = 2 \\ ml + l = 2 \end{cases}$

sottraggo e ottengo $m = l$ e quindi $l = \dfrac{2}{l+1} \Rightarrow l = 1$, $\boxed{-2}$ NO

$\boxed{\text{Punti (i) e (ii) con la funzione}}$

Considero $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$. È una funzione decrescente per $x > -1$.

Dim (i) per induzione. $\boxed{n = 0}$ $\frac{1}{2} \leq a_0 \leq \frac{4}{3}$ $a_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow$ ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp. $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$ Tesi: $\frac{1}{2} \leq a_{n+1} \leq \frac{4}{3}$

Dim. P.I. prendo l'Hp e applico $f(x)$:

$$\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$$

Inverto i versi perché f è decrescente

$$\begin{array}{ccccc} f\left(\frac{1}{2}\right) & \geq & f(a_n) & \geq & \frac{4}{3} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \frac{4}{3} & \geq & a_{n+1} & \geq & \frac{6}{7} \geq \frac{1}{2}. \end{array}$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{\frac{4}{3}+1} = \frac{6}{7}$$

$\boxed{\text{Dim punto (ii)}}$ Rafforzo il punto (ii) dicendo che

$$a_{2n} \leq a_{2n+2} \leq 1 \quad , \quad 1 \leq a_{2n+3} \leq a_{2n+1}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{4}{3}, \quad a_2 = \frac{6}{7}$$

$a_0 \leq a_2 \leq 1$ Applico f $\quad \underset{a_1}{f(a_0)} \geq \underset{a_3}{f(a_2)} \geq \underset{1}{f(1)}$

$a_1 \geq a_3 \geq 1$ Applico f $\quad f(a_1) \leq f(a_3) \leq f(1)$

$a_2 \leq a_4 \leq 1$ Applico f

$a_3 \geq a_5 \geq 1$ ... $\quad a_4 \leq a_6 \leq 1$ ....

$\boxed{\text{PIANO CON LA DISTANZA}}$ Idea: la distanza tra a_n e 1 decresce ad ogni passaggio.

Pongo $d_n = |a_n - 1|$ ← Distanza tra a_n e 1

(i) $d_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ BANALE

(ii) $d_{n+1} \leq d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \to \ell \in \mathbb{R}$ SOLITO

(iv) $\ell = 0$ [cioè $a_n \to 1$] NON SEGUE DA (i) + (iii)

$\boxed{x_n \text{ DECRESCENTE e } x_n \geq 0 \not\Rightarrow x_n \to 0}$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = \left|\frac{2}{a_n+1} - 1\right| =$$

$$= \left|\frac{2 - a_n - 1}{a_n + 1}\right| = \left|\frac{1 - a_n}{a_n + 1}\right| = \frac{|1 - a_n|}{a_n + 1} = \frac{d_n}{\underbrace{\boxed{a_n + 1}}_{\geq 1}} \leq d_n$$

(i), (ii), (iii) OK il punto (iv) NO

Nel (ii) abbiamo dimostrato che

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{\boxed{a_n+1}} \leq \frac{2}{3} d_n$$

$\geq \frac{3}{2}$ perché già sappiamo che $a_n \geq \frac{1}{2}$

coeff. $<$ 1

STRETTO

Ho in realtà dimostrato che $d_{n+1} \leq \boxed{\frac{2}{3}} d_n$

PIANO CORRETTO

(i) $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $d_{n+1} \leq \frac{2}{3} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$

(iv) $d_n \to 0$

(i) Fatto sopra per induzione usando la funzione

(ii) Fatto sopra usando che $a_n \geq \frac{1}{2}$

(iii) Segue dal punto (ii) per induzione

$$d_1 \leq \frac{2}{3} d_0 \quad , \quad d_2 \leq \frac{2}{3} d_1 \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} d_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_0$$

$$d_3 \leq \frac{2}{3} d_2 \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^2 d_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 d_0$$

quindi dopo n passaggi $\quad d_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n d_0$ [FARE INDUZIONE FORMALMENTE]

(iv) $$\underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{0}} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{d_n} \leq \underset{\substack{\downarrow\\ 0}}{\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^n d_0}}$$

si usa che $\frac{2}{3} < 1$

CARABINIERI!

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 53}}$

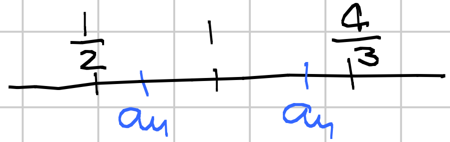
Commenti sul piano con la distanza

$d_n = |a_n - 1| \qquad f(x) = \frac{2}{x+1} \qquad f(1) = 1$

$f(a) - f(b) = f'(\xi)(a-b)$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 1| = |f(a_n) - f(1)|$$
$$= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 1|$$
$$= |f'(\xi)| \cdot d_n \qquad \xi \text{ sta tra } a_n \text{ e } 1$$

Se io so già che $\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{4}{3}$, allora



anche $\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{4}{3}$

$$f'(\xi) = -\frac{2}{(\xi+1)^2}, \quad \text{quindi} \quad |f'(\xi)| = \frac{2}{(\xi+1)^2} \le \frac{2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{8}{9}$$

Ho dimostrato che

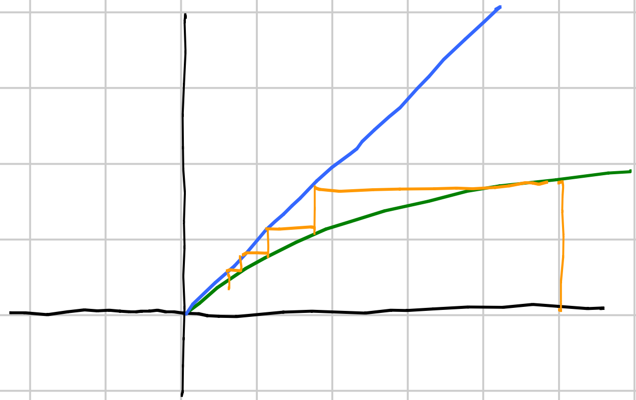
$$d_{n+1} \le |f'(\xi)| \cdot d_n \le \overset{<1}{\boxed{\frac{8}{9}}} d_n$$

Basta per concludere.

— o — o —

La distanza può essere utile anche quando la succ. è monot.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n \qquad a_0 = 2006$$



Volevamo dim. che $a_n \to 0$

Pongo $d_n = |a_n - 0| = |a_n|$

$$f(x) = \frac{1}{2}\arctan x \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - 0| = |f(a_n) - f(0)|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot |a_n - 0|$$

$$= |f'(\xi)| \cdot d_n \leq \boxed{\frac{1}{2}} d_n$$

$<1 \Rightarrow$ Basta per concludere

$$|f'(\xi)| = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\xi^2} \leq \frac{1}{2}$$

il den. è minimo per $\xi = 0$

$\boxed{\text{PIANO}}$ Posto $d_n = |a_n - 0|$

Fatto con Lagrange $\rightarrow$ (i) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

segue da (i) per induz $\rightarrow$ (ii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) carabin. $\rightarrow$ (iii) $d_n \rightarrow 0$

SUCC. PER RICORRENZA NON AUTONOME

$\boxed{\text{Esempio 1}}$ $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{n+2006}} \qquad a_0 = 6002 \qquad \left[a_1 = \dfrac{6002}{\sqrt{2006}} \right]$

$\boxed{\text{PIANO CON LA MONOTONIA}}$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione tranquilla

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ $\quad a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \qquad \dfrac{a_n}{\sqrt{n+2006}} \overset{?}{\leq} a_n \; , \quad \underbrace{a_n}_{\geq 0 \text{ per (i)}} \Bigg(1 - \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{n+2006}}}_{> 0} \Bigg) \overset{?}{\geq} 0$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Teo. succ. monotone

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$

$$\boxed{a_{n+1}} = \frac{a_n}{\boxed{\sqrt{n+2006}}}$$

$$a_n \to \ell \qquad \sqrt{n+2006} \to +\infty$$

$$\ell = 0$$

— o —

$\boxed{\text{PIANO 2}}$ (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE

(ii) $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim di (ii)}}$ Uso criterio del rapporto per le succ.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{a_n}}{\sqrt{n+2006}} \cdot \frac{1}{\cancel{a_n}} \to 0 < 1 \implies \text{La succ. } a_n \to 0.$$

Esempio 2 $\quad a_{n+1} = \dfrac{15n+3}{6n-2} a_n \quad ; a_7 = \dfrac{1}{7}$

$\boxed{\text{PIANO 2}}$ (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE

(ii) $a_n \to +\infty$

$\boxed{\text{Dim di (ii)}}$ Uso criterio del rapporto:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{15n+3}{6n-2} \frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_n}} \longrightarrow \frac{15}{6} > 1 \implies a_n \longrightarrow +\infty$$

— o — o —

Esempio 3 $\quad a_{n+1} = \dfrac{5a_n + \sin a_n + \cos n!}{n+7-\arctan n} \qquad a_0 = 8$

Idea: $a_n \to 0$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $-100 \leq a_n \leq 100 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad |a_n| \leq 100$

(ii) $a_n \to 0$

$\boxed{\text{Dim. di (i)}}$ Induzione $\boxed{n=0}$ $-100 \leq 8 \leq 100$ ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp. $|a_n| \leq 100$ Tesi: $|a_{n+1}| \leq 100$

Dim. $|a_{n+1}| = \left| \dfrac{5a_n + \sin a_n + \cos n!}{n+7-\arctan n} \right|$ $\qquad \arctan n \leq n$ per disug. classica

$\leq \dfrac{502}{7} \leq 100$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Dimostrare che $a_n \to 0$ è equivalente a dim. che $|a_n| \to 0$, il che a sua volta è equivalente a dimostrare che $|a_{n+1}| \to 0$

Ragionando come nel punto (i) abbiamo che

$$0 \le |a_{n+1}| = |\text{Mostro}| \le \boxed{\frac{502}{n+7-\arctan n}}$$

0 $\qquad$ 0 carabinieri $\qquad$ 0

MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA 54}}$

<u>Esempio 1</u> $\quad a_1 = 1000 \qquad a_{n+1} = \frac{n^{1000}}{2^n} a_n$

[Se uno prova a calcolare i primi termini

$$a_2 = \frac{1^{1000}}{2^1} a_1 = \frac{1}{2} a_1 = 500, \quad a_3 = \frac{2^{1000}}{2^2} 500 = 500 \cdot 2^{998}$$

$$a_4 = \frac{3^{1000}}{2^3} a_3 = \frac{3^{1000}}{2^3} 2^{998} \cdot 500 = 500 \cdot 2^{995} \cdot 3^{1000}$$

DIVENTANO ENORMI]

In realtà $a_n \to 0$

$\boxed{\text{PIANO 1}}$ (i) $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZ.

(ii) $a_n \to 0$ RAPPORTO

$\boxed{\text{PIANO 2 con monotonia}}$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ definitivamente $\left[\text{non appena } \frac{n^{1000}}{2^n} \leq 1\right]$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ SOLITO

(iv) $\ell = 0$ SOLITO

— o — o —

Esempio 2 $\qquad a_{n+1} = n a_n^2 \qquad a_1 = 1$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

(i) $a_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ INDUZIONE

(ii) $a_n \to +\infty$

$$a_{n+1} = n a_n^2 \geq n$$

$+\infty \qquad +\infty$

Se $a_{n+1} \to +\infty$, anche $a_n \to +\infty$

Esempio 3

$a_{n+1} = n a_n^2 \qquad a_1 = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{matrix} a_{n+1} & = & n & a_n^2 & \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \ell & = & +\infty & \cdot\ \ell & = +\infty \end{matrix}}$$

No !!!

$a_2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$a_3 = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}$

$a_4 = 3 \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{3}{64} < \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$

In questo caso $a_n \to 0$ e si dimostra con il seguente

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall n \geq 1$

(ii) $a_n \to 0$ [(i) + carabinieri]

Dim (i) per induzione. $a_n \geq 0$ è immediato.

Dim. quindi solo che $a_n \leq \frac{1}{2^n}$

$\boxed{n=0}$ $a_0 \le \frac{1}{2}$ ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp $a_n \le \frac{1}{2^n}$ Tesi $a_{n+1} \le \frac{1}{2^{n+1}}$

$$a_{n+1} = n \cdot a_n^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Uso Hp}}}{\le} n \cdot \frac{1}{2^{2n}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{SPERO}}}{\overset{?}{\le}} \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{n}{2^{2n}} \overset{?}{\le} \frac{1}{2^{n+1}} \; ; \quad n \cdot 2^{n+1} \overset{?}{\le} 2^{2n} \; ; \quad \boxed{n \overset{?}{\le} 2^{n-1}}$$

VERA perché si dimostra a sua volta per induzione (FATTO la 1ª settimana).

Provo a farlo con la monotonia $\qquad a_{n+1} = n a_n^2 \qquad a_1 = \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{PIANO}}$ (i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq 1$ BANALE

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \geq 1$

(iii) $a_n \to l \in \mathbb{R}$ BANALE

(iv) $l = 0$

Provo a dim (ii) $\qquad a_{n+1} \overset{?}{\leq} a_n \;; \quad n a_n^{\cancel{2}} \overset{?}{\leq} \cancel{a_n} \;; \quad n a_n \overset{?}{\leq} 1$

$a_n \overset{?}{\leq} \frac{1}{n}$ Nel momento in cui facciamo il punto (ii) non sappiamo se è vera.

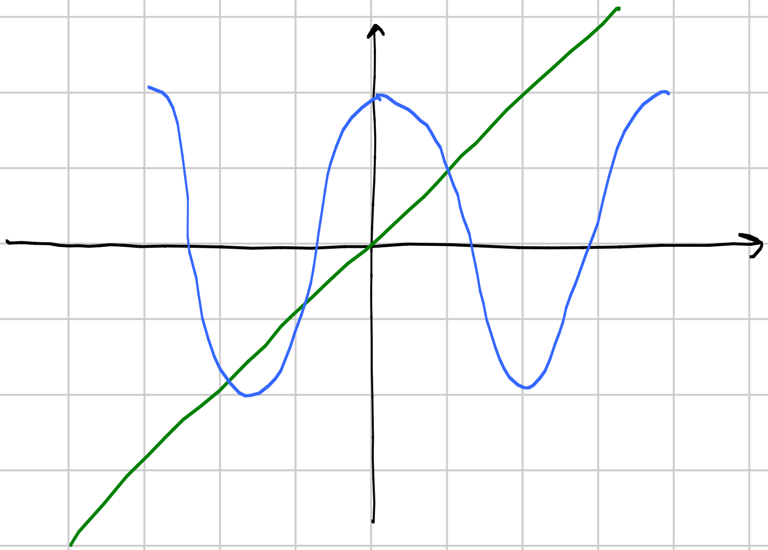
(i.5) $a_n \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1$ Induzione ...

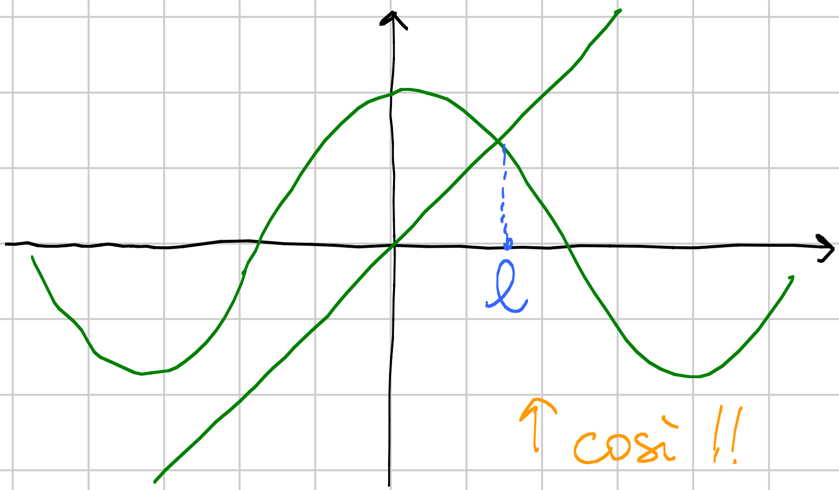
$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp: $a_n \leq \frac{1}{n}$ Tesi: $a_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

SPERO: NO!!!

$$a_{n+1} = n a_n^2 \leq \cancel{n} \frac{1}{n^{\cancel{2}}} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}$$

Esempio 4   Quante soluzioni ha l'eq. $x = \frac{1}{2}\cos x$?





Quale di questi?

Studio la funzione $g(x) = x - \frac{1}{2}\cos x$; $g'(x) = 1 + \frac{1}{2}\sin x$

$\geq \frac{1}{2} > 0$

$\Rightarrow$ g strett. cresc. $\Rightarrow$ iniettiva $\Rightarrow$ al max 1 soluz. che chiamo l.

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\cos a_n \qquad a_0 = 6002$$

Idea: $a_n \to \ell$ (soluz. dell' eq. prec.) spiraleggiando.

$\boxed{\text{PIANO}}$ Pongo $d_n = |a_n - \ell|$ $\boxed{\text{N.B.}}$ $\frac{1}{2}\cos\ell = \ell$

(i) $d_{n+1} \leq \frac{1}{2} d_n$ $\leftarrow$ DA FARE

(ii) $d_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n d_0$ ((i) + induzione)

(iii) $d_n \to 0$ (quindi $a_n \to \ell$) ((ii) + carabinieri)

$\boxed{\text{Dim di (i)}}$ Sia $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$

$$d_{n+1} = |a_{n+1} - \ell| = |f(a_n) - f(\ell)|$$

$$= |f'(\xi)|\,|a_n - \ell| \leq \frac{1}{2}|a_n - \ell|$$

$$= \frac{1}{2} d_n$$

$$|f'(\xi)| = \left|\frac{1}{2}\sin\xi\right| = \frac{1}{2}|\sin\xi| \leq \frac{1}{2}$$

— o —

In particolare possiamo ottenere la soluz. dell'eq.

$x = \frac{1}{2}\cos x$ come limite di una succ. def. per ricorr.

— o — o —

$\boxed{\text{Es. 1 (HARD)}}$ $\quad a_{n+1} = \cos(a_n) \qquad a_0 = 2006$

[equivale a scrivere 2006 in una calcolatrice e poi continuare a schiacciare cos]

$x = \cos x \leftarrow$

$\boxed{\text{Es. 2 (HARD)}}$ $\quad a_{n+1} = \arctan a_n \qquad a_0 = 2006$ [Facile: $a_n \to 0$]

Hard: cosa fa $\sum a_n$???