MAT I TLC

Titolo nota

ORA 50

14/11/2006

SUCCESSIONI PER RICORRENZA

$$a_{n+1} = 2a_n - 1 \qquad a_0 = 2$$

$$a_1 = 2a_0 - 1 = 2\cdot 2 - 1 = 3, \quad a_2 = 2a_1 - 1 = 5, \quad a_3 = 2a_2 - 1 = 9, \ldots$$

Per calcolare a_{2006} occorre calcolare tutti i termini precedenti.

In generale possiamo pensare a succ. definite da

$$\boxed{a_{n+1} = f(a_n)} \qquad \boxed{a_0 = \alpha}$$

legge RICORSIVA (RICORSIONE)

Valore iniziale

SUCC. AUTONOMA / PRIMO ORDINE (dipende solo dal prec.)

$$a_{n+1} = 2a_n + 6a_{n-1}$$

In questo caso servono 2 valori per partire

SECONDO ORDINE!

dipendenza dai 2 termini precedenti

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta$$

A questo punto si parte $a_2 = 2a_1 + 6a_0 = 2\beta + 6\alpha$, $a_3 = \dots$

$$\boxed{a_{n+1} = 2a_n - n \qquad a_0 = 2}$$

NON AUTONOMA

In questo la legge di passaggio da a_n ad a_{n+1} cambia di volta in VOLTA

$a_1 = 2a_0 - 0 = 4$, $a_2 = 2a_1 - 1 = 7$, $a_3 = 2a_2 - 2 = 12$

USO RICORRENZA con $n=0$ $\quad \boxed{n=1} \quad \boxed{n=2}$

Autonoma: a_{n+1} dipende SOLO da a_n

Non autonoma: a_{n+1} dipende da a_n e da n

Ci limiteremo a succ. per ric. del 1° ordine, autonome e non autonome.

Esempio 1 $\quad a_{n+1} = a_n^2$, $a_0 = \frac{1}{2}$ $\quad$ Qual è il limite di a_n?

[In questo caso non è difficile trovare una formula ESPLICITA per a_n, ma noi studiamo il problema senza RICAVARLA]

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n$ " " "

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$

(iv) $\ell = 0$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Grazie ai punti (i) e (ii) sappiamo che a_n è deb. decr. e limitata inf. $\Rightarrow$ esiste il limite ed è $\in \mathbb{R}$

(teo succ. monotone)

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & a_n^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ l & = & l^2 \end{array}$$

Dal p.to (iii) so che $a_n \to l$

$l = l^2$; $l^2 - l = 0$, $l(l-1) = 0$

$l = 0$ ← UNICA POSSIBILITÀ

$l = \boxed{1}$ incompatibile con il punto (i)

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ $a_n \geq 0$ ovvia perché faccio sempre quadrati

$a_n \leq \frac{1}{2}$ Induzione

$\boxed{n=0}$ $a_0 \leq \frac{1}{2}$ O.K. ; $\boxed{\text{P.I.}}$ Hp $a_n \leq \frac{1}{2}$ Tesi $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}$

se $0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}$, allora $0 \leq a_n^2 \leq \frac{1}{4}$

$0 \leq a_{n+1} \leq \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Devo dim. che $a_{n+1} \le a_n$, cioè che

$$a_n^2 \le a_n, \quad a_n^2 - a_n \le 0, \quad a_n(a_n - 1) \le 0$$

Vera $\iff$ $0 \le a_n \le 1$, ma questo segue dal punto (i)

<u>Esempio 2</u> $\quad a_{n+1} = a_n^2, \quad a_0 = 3$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (iii)}}$ Teo. succ. monotone

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$ Supponiamo per assurdo che sia $\ell \in \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{a_{n+1}} = \boxed{a_n^2}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$\ell = \ell^2$$

$\ell = \ell^2 \Rightarrow \ell = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$] entrambi incompatibili con (i)

L'unica possibilità è che sia $\ell = +\infty$

$\boxed{\text{Dim (i)}}$ Induzione

$\boxed{\text{Dim (ii)}}$ Devo dim. che $a_{n+1} \overset{?}{\geq} a_n$, $a_n^2 \geq a_n$, ...

$a_n(a_n - 1) \geq 0$ vera se $\boxed{a_n \geq 1}$ oppure $a_n \leq 0$

↑ grazie al punto (i) questa è verificata

Dimostrazione alternativa dei punti (i) e (ii).
Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$. È una funzione (deb.) crescente per $x \geq 0$

Dim (i) per induz. $a_0 \geq 3$ ok.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp: $a_n \geq 3$ applico $f(x)$

$$\begin{array}{ccccc} f(a_n) & \geq & f(3) & & \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \\ a_{n+1} & \geq & 9 & \geq 3 & \leftarrow \text{Tesi} \end{array}$$

$\boxed{\text{Dim (ii) per indus.}}$ $a_2 \geq a_1$ vera? $9 \geq 3$ ok.

<u>Hp.</u> $a_{n+1} \geq a_n$ applico $f(x)$

$$\begin{array}{cccc} f(a_{n+1}) & \geq & f(a_n) & \\ \shortparallel & & \shortparallel & \\ a_{n+2} & \geq & a_{n+1} & \leftarrow \text{Tesi.} \end{array}$$

Esempio 3 $\qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3} \qquad a_0 = 0$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $0 \leq a_n \leq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ ← (i) + (ii) + teo. succ. monot.

(iv) $\ell = 3$

$\boxed{\text{Dim (iv)}}$

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & \sqrt{2a_n+3} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & \sqrt{2\ell+3} \end{array}$$

$\ell = \sqrt{2\ell+3}\,; \quad \ell^2 = 2\ell+3\,; \quad \ell^2 - 2\ell - 3 = 0\,; \quad (\ell-3)(\ell+1) = 0$

$\ell = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

3 ← LIMITE

-1 incomp. con (i) ↗ NON ACCETTABILE come soluz. dell' eq.

Per i punti (i) e (ii) considero la funzione $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

Questa funzione è crescente (almeno per $x \geq 0$) e $\boxed{f(3) = 3}$

Hp $\rightarrow$ $0 \leq a_n \leq 3$ applico $f(x)$

$$f(0) \leq \underset{\shortparallel}{f(a_n)} \leq f(3)$$

Tesi $\rightarrow$ $0 \leq \sqrt{3} \leq a_{n+1} \leq 3$ e questo dimostra (i)

Punto (ii) $a_1 \geq a_0$ $\sqrt{3} \geq 0$ OK.

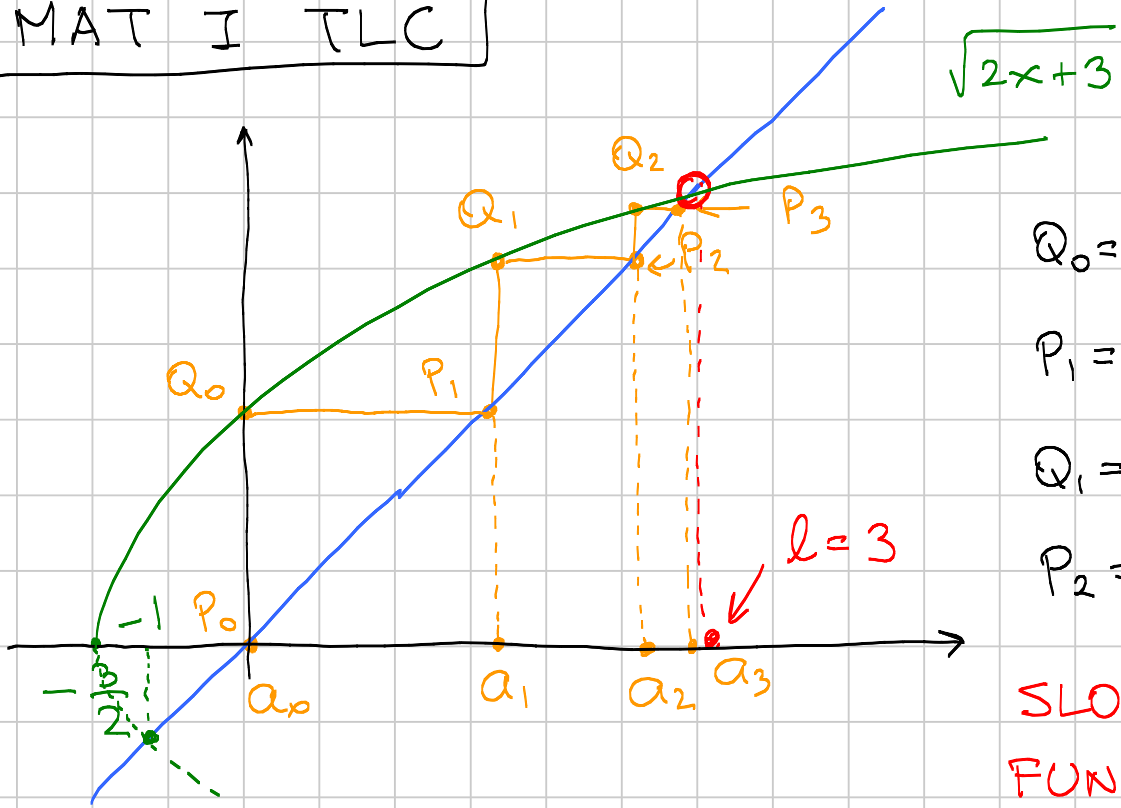
Hp $\rightarrow$ $a_{n+1} \geq a_n$ applico $f(x)$

$$\underset{\shortparallel}{f(a_{n+1})} \geq \underset{\shortparallel}{f(a_n)}$$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \leftarrow \text{Tesi}$$

MAT I TLC

ORA 51



$Q_0 = (a_0, f(a_0)) = (a_0, a_1)$

$P_1 = (a_1, a_1)$

$Q_1 = (a_1, f(a_1)) = (a_1, a_2)$

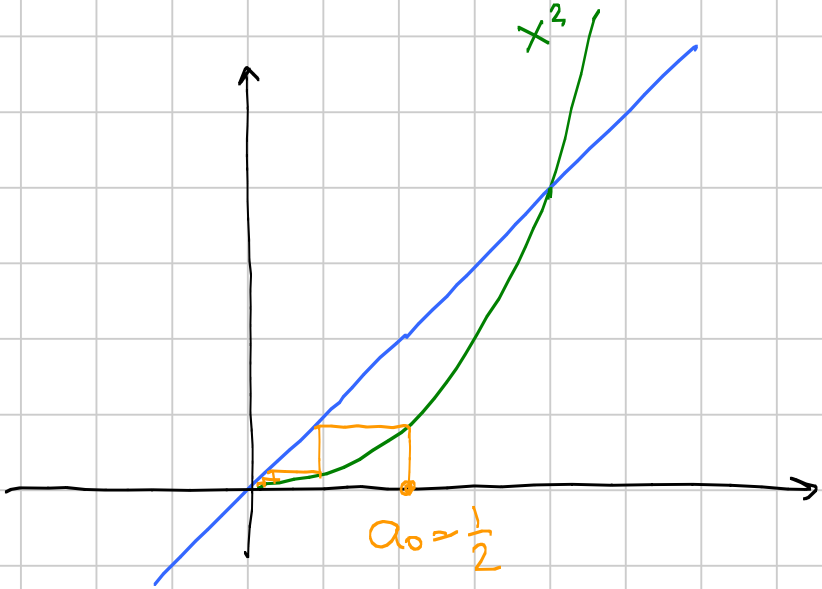
$P_2 = (a_2, a_2)$

SLOGAN: VERTICALE ALLA FUNZIONE, ORIZZONTALE ALLA BISETTRICE

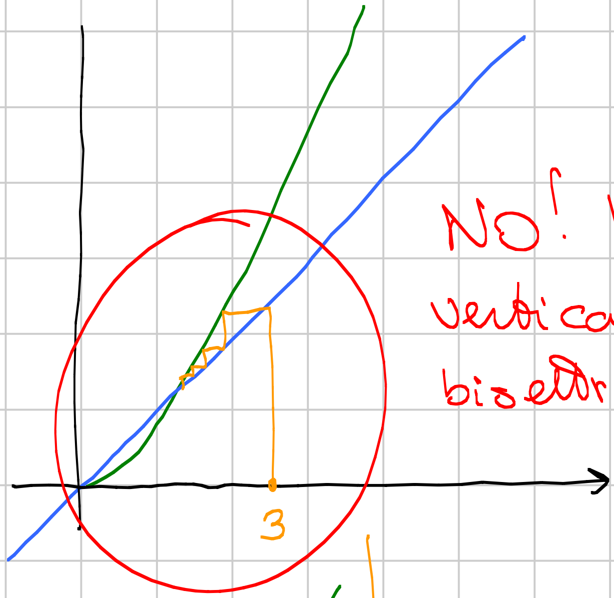
Per calcolare il punto di intersezione devo risolvere l'eq.

$$f(x) = x, \quad \text{cioè} \quad \sqrt{2x+3} = x$$

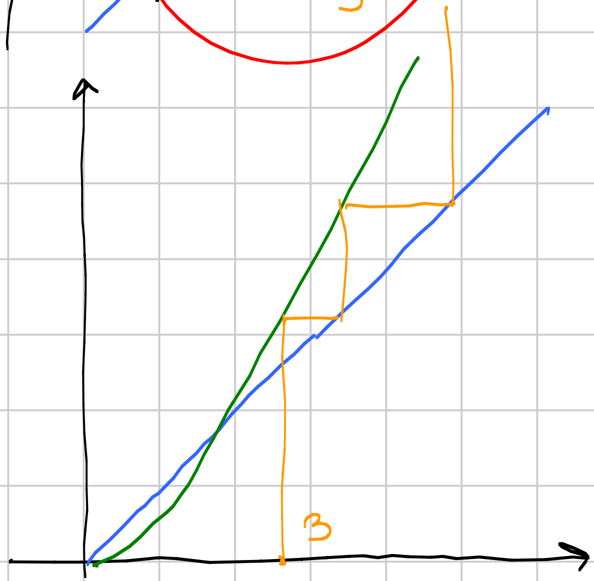
$a_{n+1} = a_n^2 \quad , \quad a_0 = \frac{1}{2}$



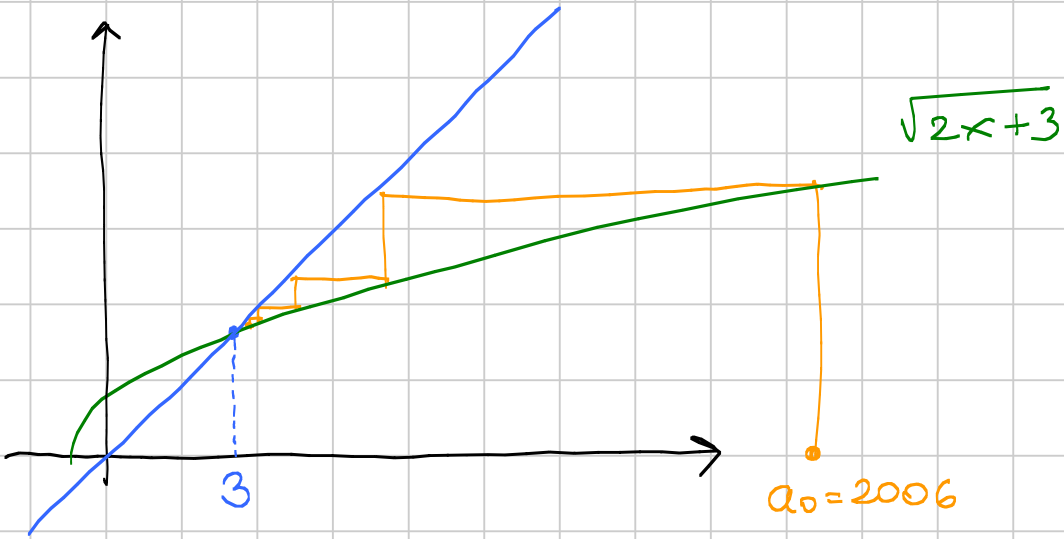
$a_{n+1} = a_n^2 \quad , \quad a_0 = 3$



NO! ho fatto verticale alla bisettr., orizz. alla funz.



Esempio 4 $\quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n+3} \qquad a_0 = 2006$



$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

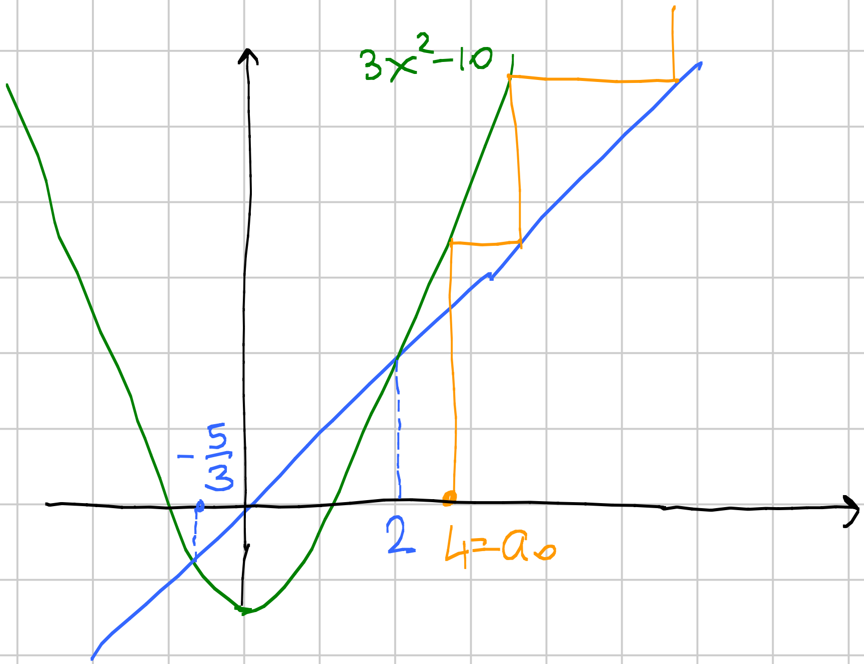
(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

} per induzione usando la monotonia della $f(x) = \sqrt{2x+3}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ [(i) + (ii) + teo. succ. monotone]

(iv) $\ell = 3$ [.... $\ell = \sqrt{2\ell+3}$ ...]

Esempio 5 $\quad a_{n+1} = 3a_n^2 - 10, \quad a_0 = 4$



$f(x) = 3x^2-10, \quad f(4) = 3\cdot 16 - 10 = 38 > 4$

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 4 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

(iv) $\ell = +\infty$

(i) : induzione $\quad$ (ii) induzione + monotonia di $f(x)$ per $x \geq 0$

$\boxed{n=0}$ $a_1 \geq a_0$ $38 \geq 4$ O.k.

$\boxed{\text{P.I.}}$ Hp: $a_{n+1} \geq a_n$ (≥ 4) Applico $f(x)$

$$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$$

$$a_{n+2} \geq a_{n+1} \leftarrow \text{Tesi del P.I.}$$

(iii) Teo. succ. monotone

(iv) Supponiamo per assurdo $l \in \mathbb{R}$

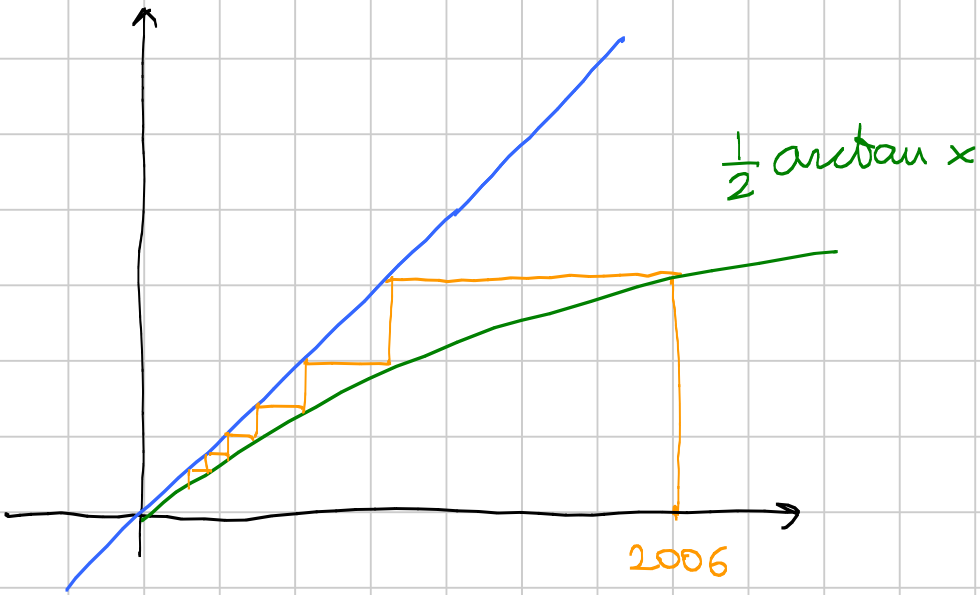
$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 10 \qquad 3l^2 - l - 10 = 0$$

$$l = 3l^2 - 10 \qquad l_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+120}}{6} = \frac{1 \pm 11}{6}$$

$$\ell = \begin{cases} 2 \\ -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$ incompatibili con (i)

— o — o —

Esempio 6 $\qquad a_{n+1} = \frac{1}{2} \arctan a_n \qquad a_0 = 2006$



Quando si vanno a disegnare x e $f(x)$ ci si pone il problema

di dove si intersecano $\boxed{f(x) = x}$

nei restanti tratti chi sta sopra $\boxed{f(x) > x}$

Quando va bene sono eq. e diseq. da precorso, quando va male occorre studiare la funzione $f(x) - x$.

Nel nostro caso per $x = 0$ si incontrano, per $x > 0$ si ha che

$$x > \arctan x > \frac{1}{2} \arctan x \Rightarrow x \text{ sta sopra}$$

Disug. classica

$\boxed{\text{PIANO}}$

(i) $a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

solito induz. + monotonia di $f(x)$

(iii) $a_n \to \ell \in \mathbb{R}$ [Solito]

(iv) $\ell = 0$ [Eq. $\ell = \frac{1}{2} \arctan \ell$]

$x = f(x)$

Sappiamo alla fine che $a_n \to 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{che fa ?}$$

① È a termini >0 perché si dim. per induz. (punto (ii))

② Cond. nec. è verificata perché $a_n \to 0$ $\Rightarrow$ PUÒ CONVERG.

Criterio del rapporto:

col cambio di var. $x = a_n$
ho che $x \to 0$ ed è il solito
limite notevole

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{2}\arctan a_n}{a_n} = \frac{1}{2}\boxed{\frac{\arctan a_n}{a_n}} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$ la serie converge.

$$a_{n+1} = e^{-a_n} \qquad a_0 = 0$$