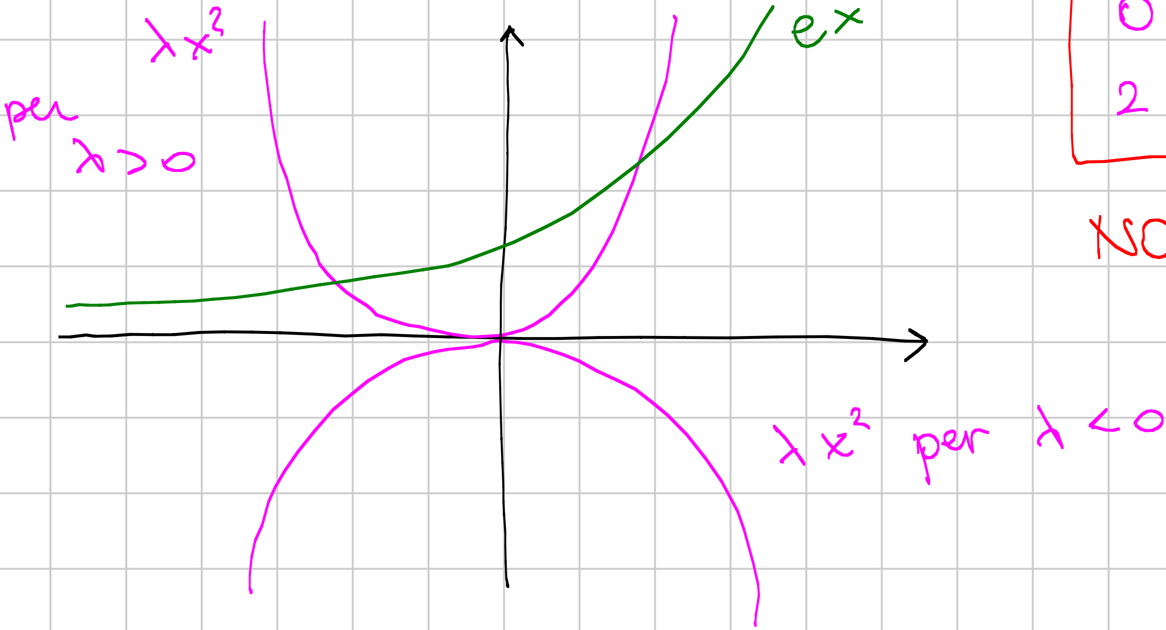
MAT I TLC

$\boxed{\text{ORA } 48}$

Titolo nota 11/11/2006

Dire al variare del param. $\lambda \in \mathbb{R}$ quante sono le soluz. dell' eq.

$$e^x = \lambda x^2$$



$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \text{ soluz. per } \lambda \leq 0 \\ 2 \text{ soluz. per } \lambda > 0 \end{array}}$$

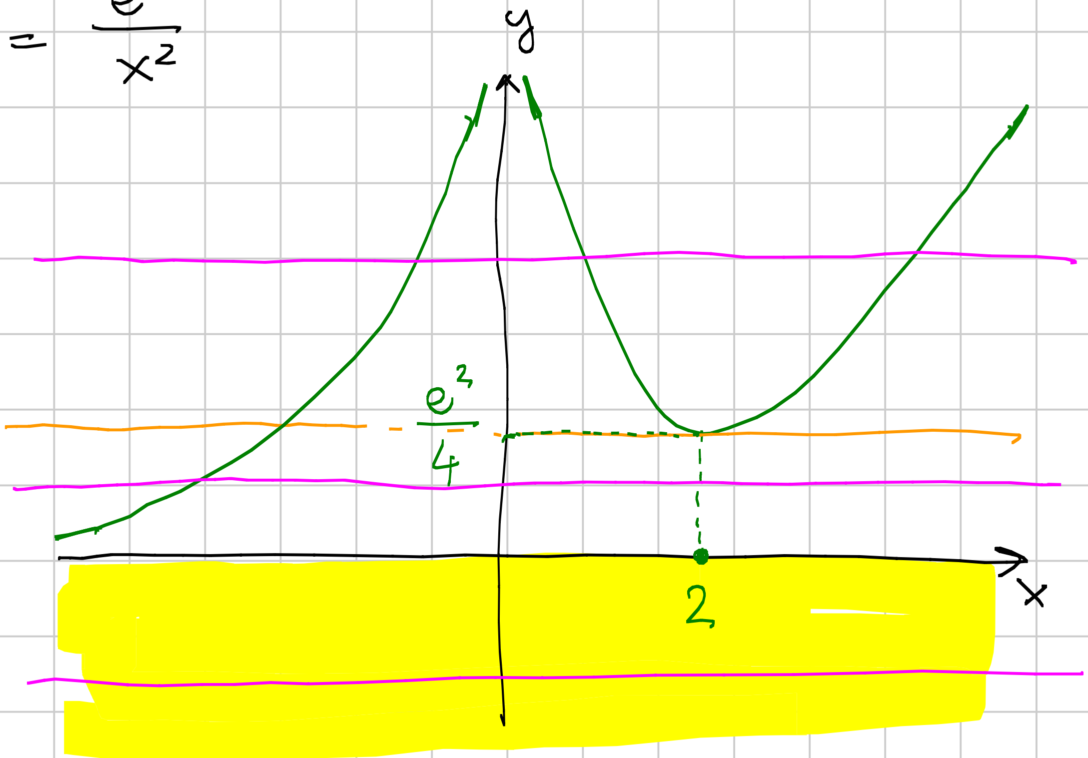
NO!!!! mai fidarsi a sovrapporre 2 grafici

$$\boxed{\frac{e^x}{x^2}} = \lambda$$

$\overset{"}{f(x)}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

Definita per $x \neq 0$



$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2x\, e^x}{x^4}$$

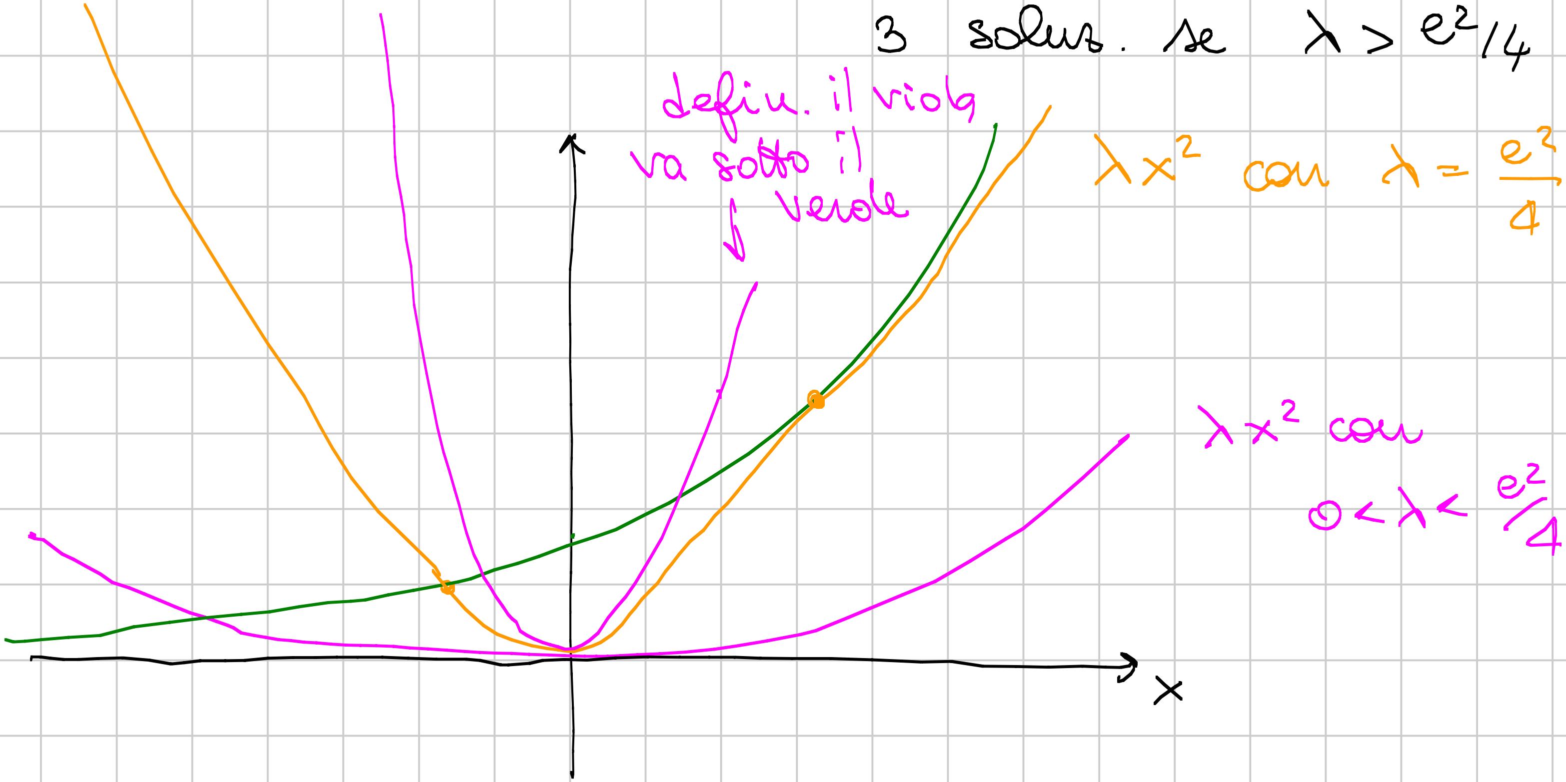
$$= \frac{x\, e^x (x-2)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x (x-2)}{x^3} = 0 \iff x = 2$$

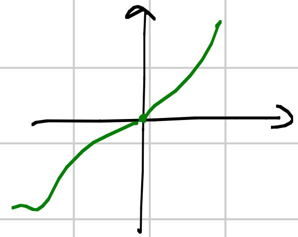
[Per esercizio dimostrare che
$f'(x) > 0$ per $x < 0$ e $x > 2$
$f'(x) < 0$ per $0 < x < 2$]

Quindi $f(x) = \lambda$ ha

- 0 soluz. se $\lambda \leq 0$
- 1 soluz. se $0 < \lambda < e^2/4$
- 2 soluz. se $\lambda = e^2/4$
- 3 soluz. se $\lambda > e^2/4$



Risolvere la diseq. $\underbrace{\boxed{2x - \sin x}}_{f(x)} \geq 0$



$f'(x) = 2 - \cos x \geq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ strett. monot. cresc.

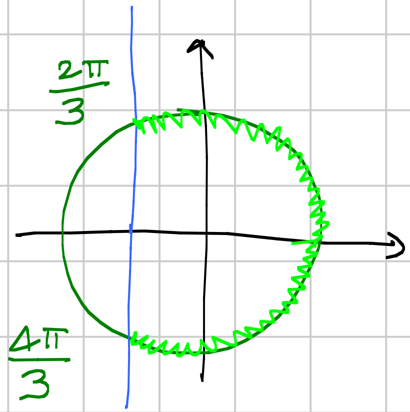
$f(0) = 0 \Rightarrow f(x) > 0$ per ogni $x > 0$

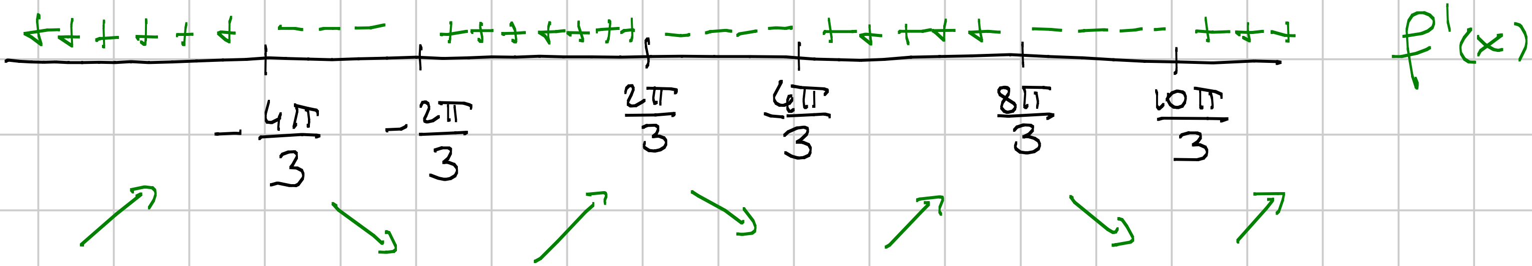
$f(x) < 0$ per ogni $x < 0$

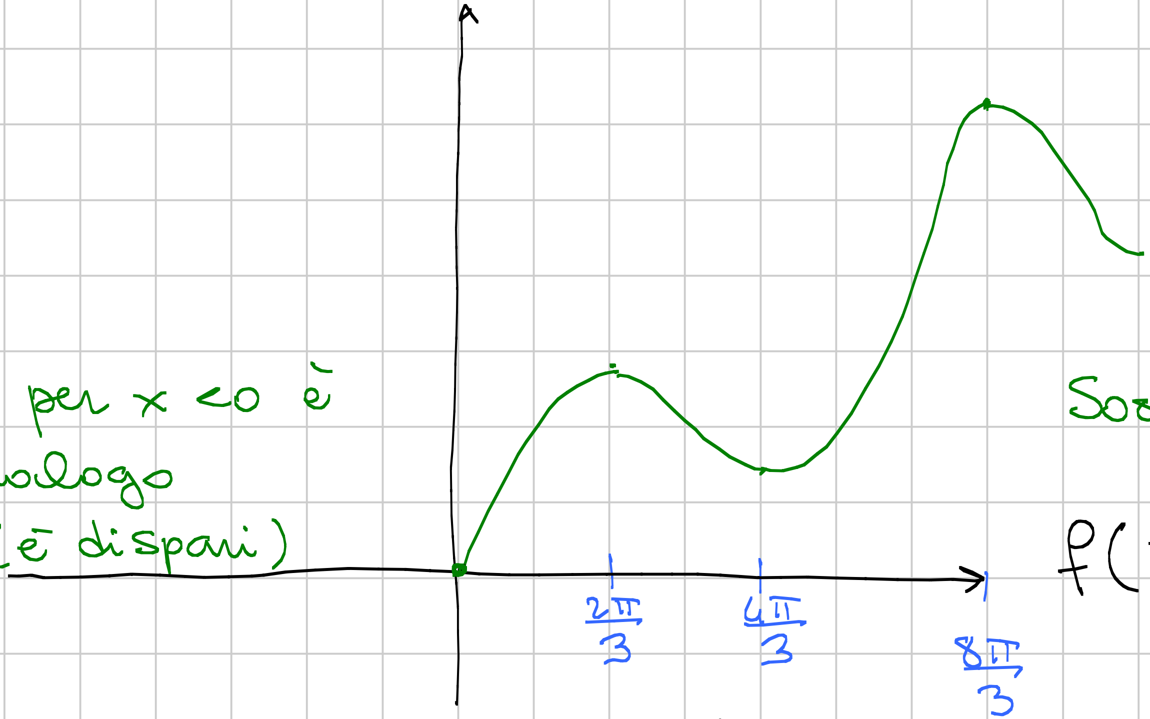
Risolvere la diseq. $\underbrace{\boxed{x + 2\sin x}}_{f(x)} \geq 0$

$f'(x) = 1 + 2\cos x$ studio il segno

$1 + 2\cos x \geq 0 \iff \cos x \geq -\frac{1}{2}$







per $x<0$ è analogo (è dispari)

Sostituisco $x = \frac{4\pi}{3}$

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} + \cancel{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} > 0$$

$$f\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} - 2\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)$$

$$= \frac{10\pi}{3} - \sqrt{3}$$ ← Tolgo sempre $\sqrt{3}$

$x + 2\sin x \geq 0 \iff x \geq 0$

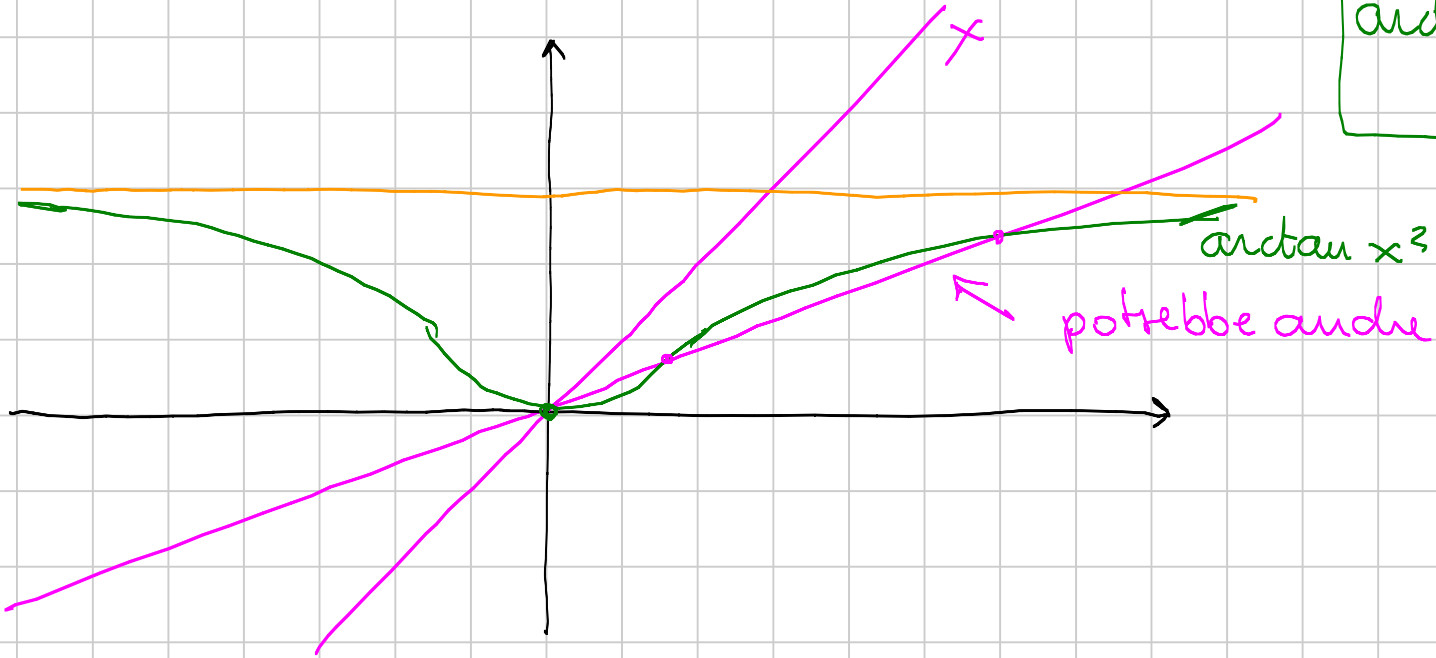
$x + 2\sin x = 0 \iff x = 0$

———— o ———— o ————

Risolvere la diseq. $\arctan x^2 \leq x$

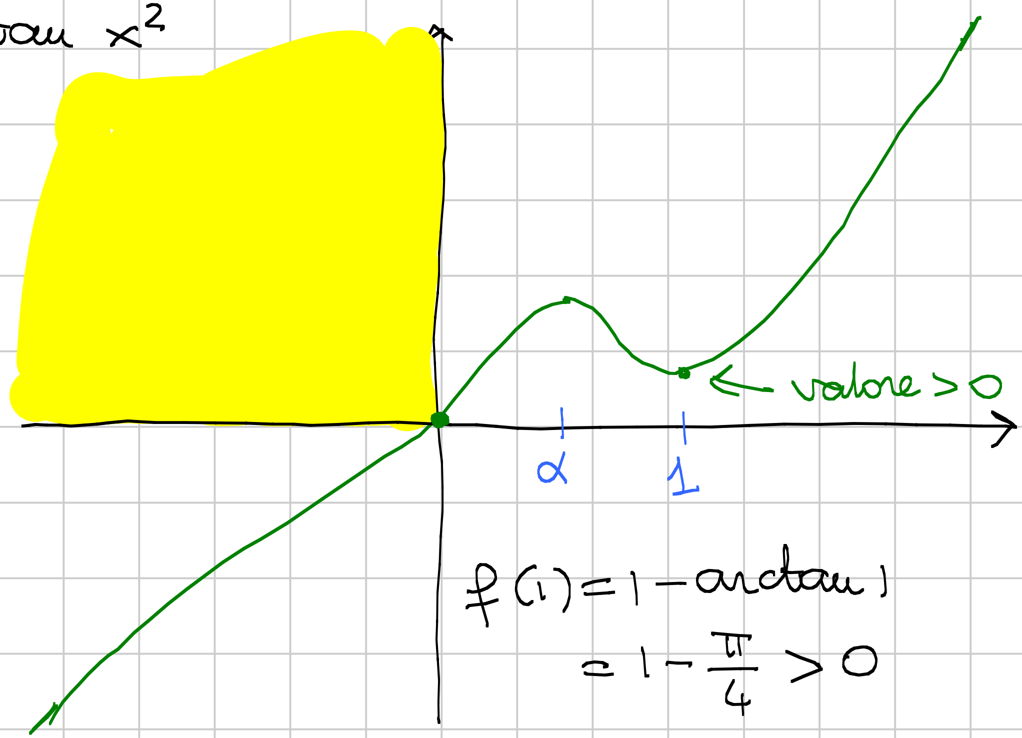
STUDIO LOCALE

$\boxed{\arctan x^2 \sim x^2 \quad \text{per } x \sim 0}$



Studio $f(x) = x - \arctan x^2$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^4} = \frac{1+x^4-2x}{1+x^4}$$



$$f(1) = 1 - \arctan 1 = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \underbrace{\boxed{x^4 - 2x + 1}}_{g(x)} \geq 0$$

per $x \leq 0$ $\quad \underbrace{x^4}_{\geq 0} \underbrace{-2x}_{\geq 0} + 1 \geq 1 \implies$ monotona crescente

Studio $g(x) = x^4 - 2x + 1$

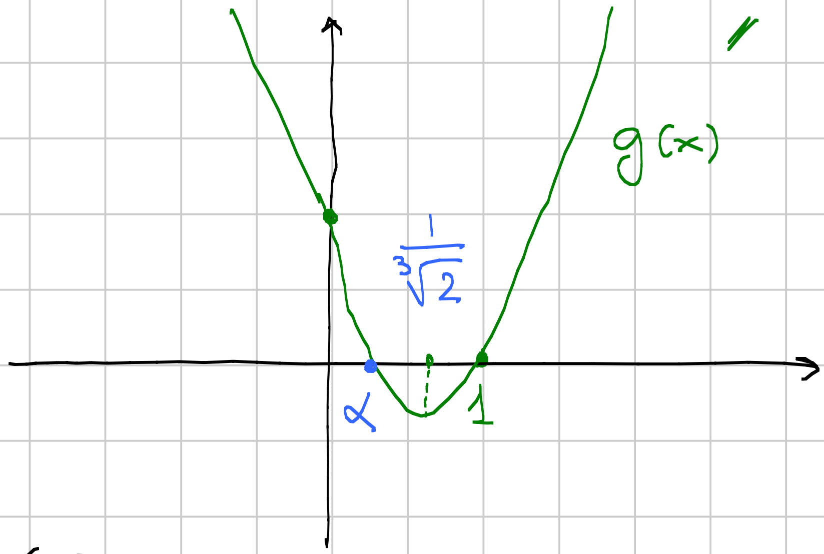
$g'(x) = 4x^3 - 2$

$g'(1) = 2$

$g''(x) = 12x^2 \geq 0$ sempre

$\Downarrow$

convessa



$g'(x) \geq 0 \iff 4x^3 - 2 \geq 0 \iff$

$2x^3 \geq 1 \iff x^3 \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Cosa posso dire del segno di $g(x)$?

$g(x) > 0$ per $x > 1$ e per $x < \alpha$ (so che $\alpha \in \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$)

$g(x) < 0$ per $\alpha < x < 1$

$g(x) = 0$ per $x = \alpha$ e $x = 1$

Ora so che $f'(x)$ è così

Conclusione $f(x) \geq 0 \iff x \geq 0$ e quindi

$$x \geq \arctan x^2 \iff x \geq 0$$

$$\max \{ x \in \mathbb{R} : x e^{-x} \leq 0 \} = 0$$

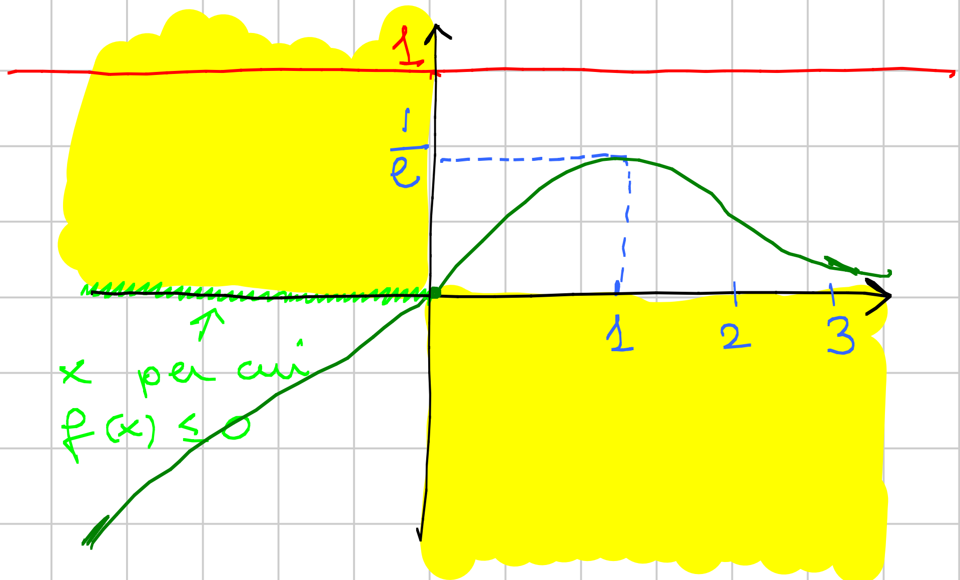
MONDO X

RISOLVI LA DISEQUAZIONE e prendi il max degli x ottenuti

$$\max\{xe^{-x} : x \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{e}$$

MONDO y

TROVA il max (valore) della funzione al variare di $x \in \mathbb{R}$



$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$$
$$= e^{-x}(1-x) = 0 \iff x = 1$$

[Controllare il segno di $f'(x)$]

$$\max\{xe^{-x} : x \in [2,3]\} = f(2) = \frac{2}{e^2}$$

MONDO y

$$\min\{xe^{-x} : x \in [2,3]\} = f(3) = \frac{3}{e^3}$$

La sol. della diseq. è tutto $\mathbb{R}$, quindi

$$\sup\{x \in \mathbb{R} ; \; xe^{-x} < 1\} = +\infty$$

Mondo x

Risolvi la diseq. $f(x) < 1$ e prendi il sup dell'insieme soluz.

Formula di Taylor con resto di LAGRANGE

Data $f(x)$, dato n intero ≥ 0 esiste un unico $P_n(x)$ di grado $\leq n$ tale che

resto di PEANO

$$f(x) = P_n(x) + \boxed{o(x^n)} \quad \text{per } x \to 0$$

resto che si vorrebbe piccolo

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Esempio

$$x^2 + 1000^{1000} x^4 = x^2 + o(x^3)$$

ξ è un punto (che non si conosce) compreso tra 0 e x

Idea della dim. nel caso $n=2$ Cauchy

$$\frac{f(x)-P_2(x)}{x^3} = \frac{f(x)-P_2(x)-[f(0)-P_2(0)]}{x^3-0} \overset{\Downarrow}{=}$$

$$= \frac{f'(\xi)-P_2'(\xi)}{3\xi^2} = \frac{f'(\xi)-P_2'(\xi)-\overbrace{[f'(0)-P_2'(0)]}^{=0}}{3\xi^2-0}$$

$P_2''' = 0$ perché derivata terza di un pol. di grado 2,

$$= \frac{f''(\xi_1)-P_2''(\xi_1)}{6\xi_1} = \dots = \frac{f'''(\xi_2) - \boxed{P_2'''(\xi_2)}^{=0}}{6}$$

$f^{(n+1)}(\xi_2)$

$(n+1)!$

$\boxed{1^a \text{ applicazione}}$ Approssimazione di funzioni

$$\sin\frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10^3} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{10^5} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{5040}\,\frac{1}{10^7} = (\star)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}\,x^7$$

$f(x) = \sin x$

$\xi \in (0, x)$

$$(\star) = \boxed{\frac{1}{10} - \frac{1}{6000} + \frac{1}{12.000.000}} + \boxed{\frac{f^{(7)}(\xi)}{5040 \cdot 10^7}}$$

se dico che $\sin\frac{1}{10}$ è

commetto un errore che è

$$= \frac{1.200.000 - 2.000 + 1}{12.000.000} = \frac{1.198.001}{12.000.000} = 0,099833416$$

$$|f^{(7)}| = \left| \begin{matrix} \pm \sin \\ \pm \cos \end{matrix} \right| (\xi)$$

$$|\text{errore}| = \frac{|f^{(7)}(\xi)|}{5.040 \cdot 10^7} \leq \frac{1}{5.000 \cdot 10^7}$$

$$\leq \frac{1}{5 \cdot 10^{10}}$$

$$\sin \frac{1}{10} = 0,099833416$$

Per esercizio: fermarsi all'ordine 3 e vedere quante cifre esatte si trovano

2ª applicazione   Dimostrare che

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{per ogni } x > 0$$

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2}}_{P_2(x)} + \frac{f'''(\xi)}{3!} x^3$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{e^{\xi}}{3!} x^3} > 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

> 0 se $x > 0$

N.B. sarebbe il contrario per $x < 0$