MAT I TLC $\boxed{\text{ORA 46}}$

Titolo nota 09/11/2006

Esempio $f(x) = 3x + \sin x$ Ha asintoti obliqui ?

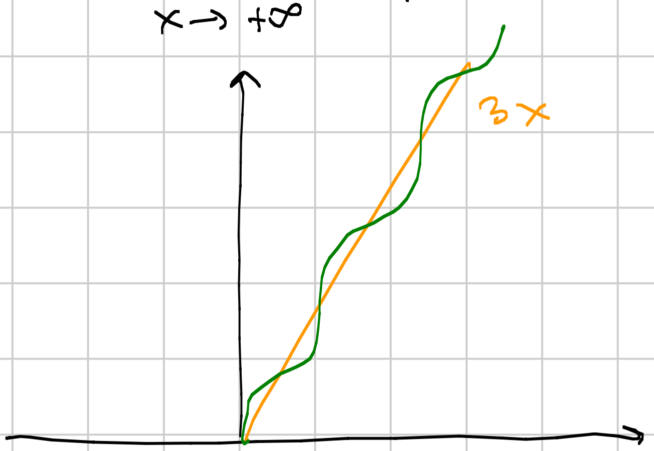
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \sin x}{x} = 3$$

[N.B. Questo limite con Hôpital non viene]

$$n = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to+\infty} [\cancel{3x} + \sin x - \cancel{3x}]$$ N.E.

$\Downarrow$

NO ASINT OBLIQUO



CONVESSITÀ LIPSCHITZIANITÀ

**Def.** Una funzione $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice CONVESSA se

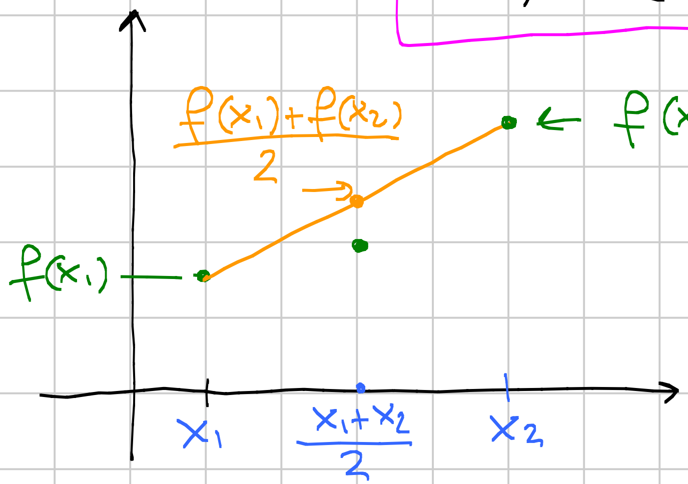
funziona anche se l'insieme di partenza è tutto $\mathbb{R}$, un intervallo chiuso o una semiretta

$$\boxed{f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \quad \forall \lambda \in [0,1]}$$

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in (a,b)}$$

Caso particolare $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$



Cosa succede quando $\lambda$ varia fra 0 e 1. Il punto

$$\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$$

$\lambda = \frac{1}{2} \rightsquigarrow \frac{x_1 + x_2}{2}$

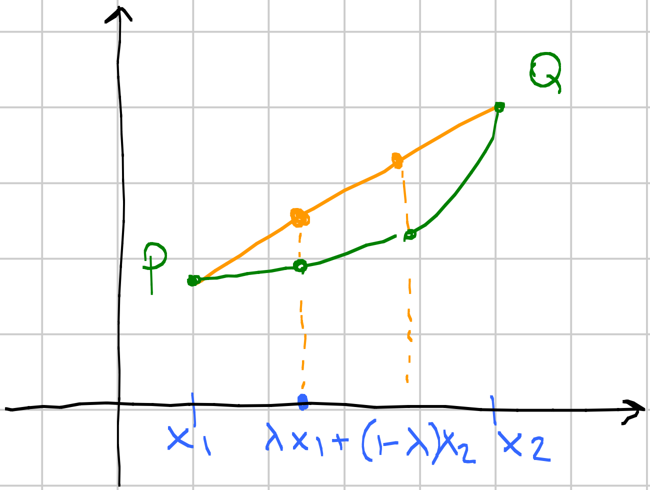
$\lambda = 0 \rightsquigarrow x_2$

$\lambda = 1 \rightsquigarrow x_1$

Quando $\lambda$ va da 0 a 1, il punto percorre il segmento $x_1, x_2$ partendo da $x_2$ verso $x_1$.

L'espressione $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ rappresenta la coord y del punto del segmento PQ che sta sopra $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$

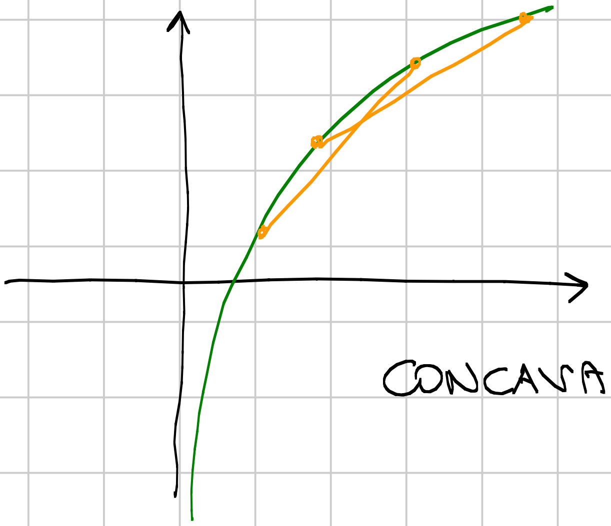
Funzione convessa $\Leftrightarrow$ il valore nel punto $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ sta sotto il segmento



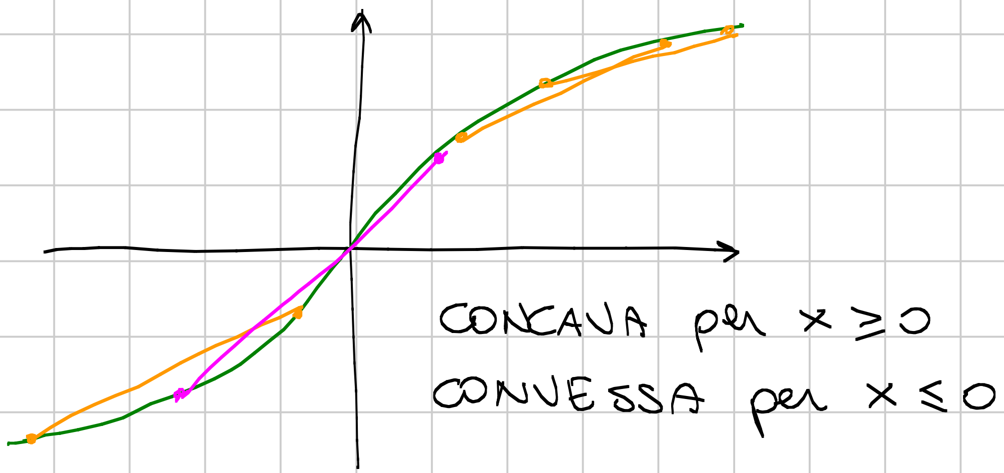
Più geometricamente: una funzione è convessa $\Leftrightarrow$ presi 2 qualunque punti P e Q sul grafico si ha che il segmento PQ sta tutto sopra il grafico.

Una funzione si dice concava se il segmento sta tutto sotto il grafico.

Esempio 1 $\log x$



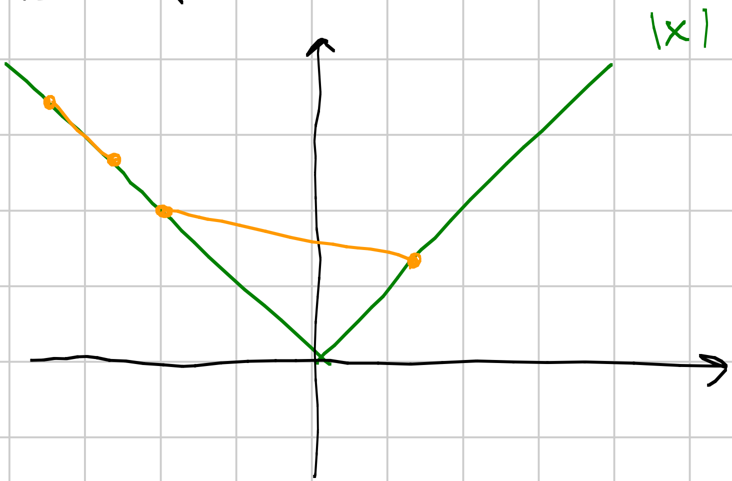

Esempio 2 $\arctan x$



Quali sono le funzioni contemporaneamente concave e convesse?
SOLO le rette. (N.B. nella def. di funzione convessa c'è il $\geq$, quindi il segmento può anche stare sul grafico)

<u>Def.</u> Si definiscono STRETT. CONVESSE le funzioni in cui il segmento PQ sta strett. sopra il grafico della funzione, tranne ovviamente agli estremi

<u>Esempio 3</u>




$|x|$ è una funzione CONVESSA su tutto $\mathbb{R}$.
Non è strett. convessa.

<u>N.B.</u> il fatto che una funzione $f$ sia convessa non garantisca l'esistenza di $f'$, $f''$, ...

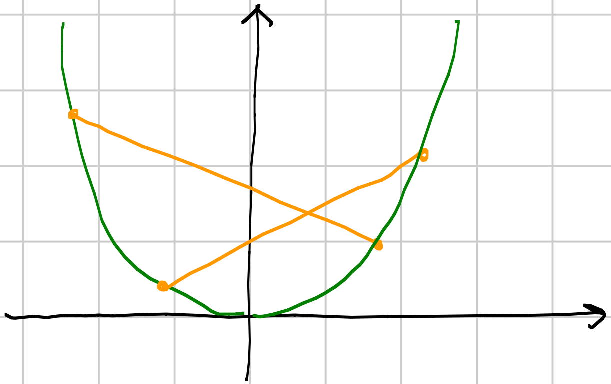
# Rapporto tra convessità e derivata II

Supponiamo che $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ abbia la derivata seconda.
Allora

$$f \text{ convessa in } (a,b) \iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b).$$

$$f \text{ strett. conv. in } (a,b) \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow} f''(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

Esempio $f(x) = x^4$. Strettamente convessa su tutto $\mathbb{R}$



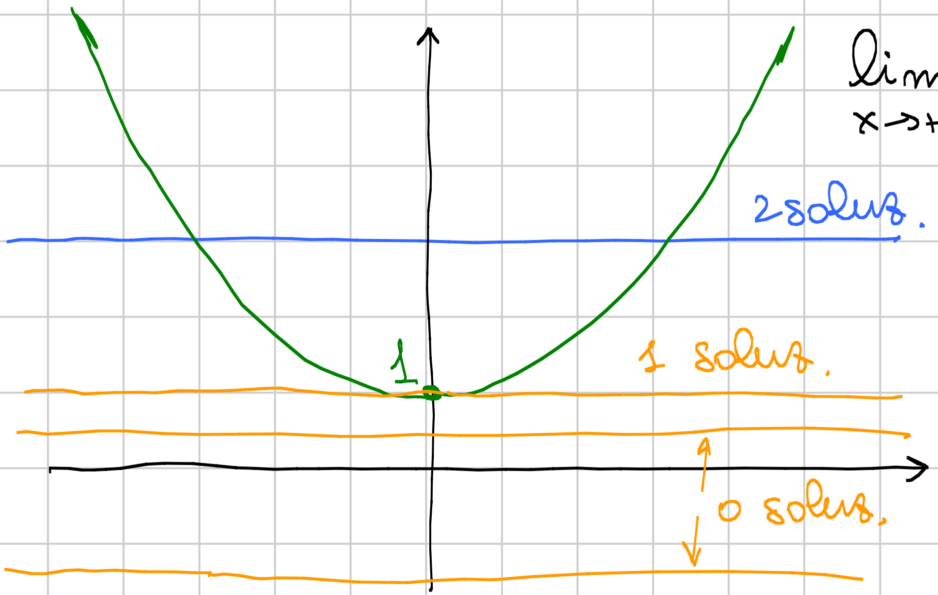
$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ sempre

ma si annulla in $x=0$

**Esempio** $f(x) = e^x - x$ è convessa.

$f'(x) = e^x - 1$ ; $f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow$ strett. conv. su tutto $\mathbb{R}$.

Quante soluz. ha l'eq. $f(x) = 2006$ ?




$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ almeno 2 soluzioni, una $> 0$ e una $< 0$.

$$f'(x) = e^x - 1 \begin{cases} > 0 & \text{per } x > 0 \\ = 0 & \text{per } x = 0 \\ < 0 & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = 0$ è p.to di min. glob.

Più in generale, l'eq. $e^x - x = \lambda$ ha

0 soluz. se $\lambda < 1$

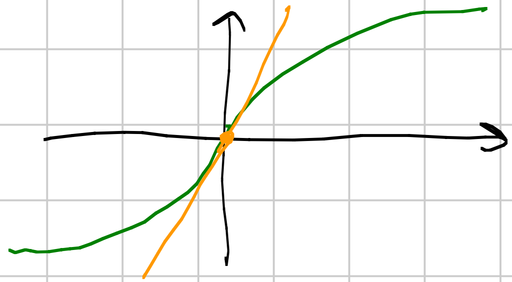
1 soluz. se $\lambda = 1$

2 soluz. se $\lambda > 1$

Esempio $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ convessa per $x > 0$

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ ; $f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} > 0$ per $x > 0$

**PUNTI DI FLESSO** Punti in cui $f$ passa da concava a convessa (o viceversa)



MAT I TLC

ORA 47

$f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

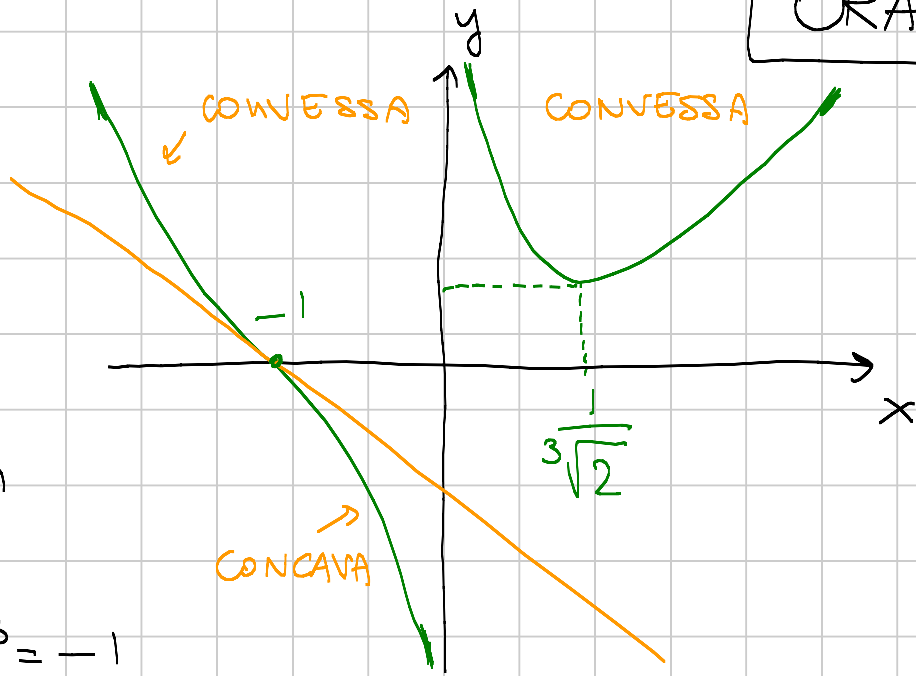
Definita per $x \neq 0$

$f(x) = 0$ mi aspetto un'unica soluz. $< 0$

$x^2 + \frac{1}{x} = 0$ ; $x^2 = -\frac{1}{x}$ ; $x^3 = -1$

$\Downarrow$

$x = -1$




L'eq. $f'(x) = 0$ ci aspettiamo che abbia un'unica soluz. $> 0$

$f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = 0 \iff 2x = \frac{1}{x^2} \iff x^3 = \frac{1}{2} \iff x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

Ci aspettiamo $f''(x) = 0$ abbia un'unica soluz. $< 0$

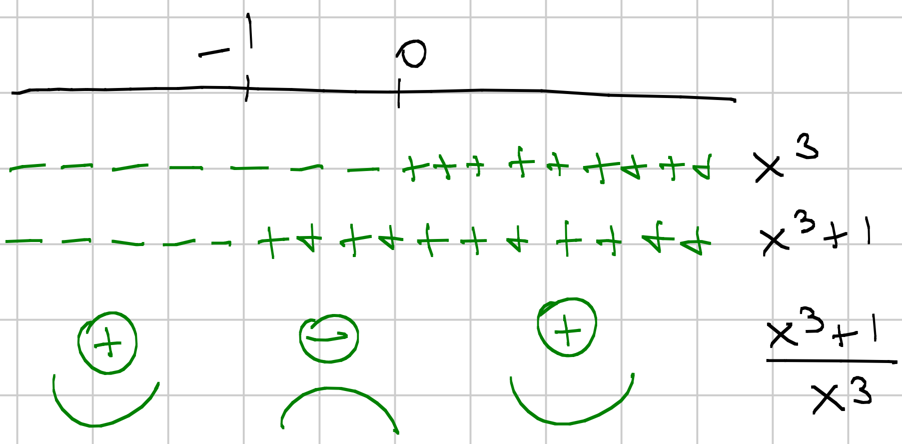
$$f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} = 0 \iff x^3 = -1 \iff x = -1$$

NOO!!!

$$2 + \frac{2}{x^3} > 0 \iff 1 + \frac{1}{x^3} > 0 \iff \frac{1}{x^3} > -1 \iff \boxed{\begin{aligned} &1 > -x^3 \\ &\Updownarrow \\ &x^3 > -1 \\ &\Updownarrow \\ &x > -1 \end{aligned}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{x^3+1}{x^3} > 0$$



**Def.** Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice LIPSCHITZIANA

vale anche se è definita in un intervallo o semiretta

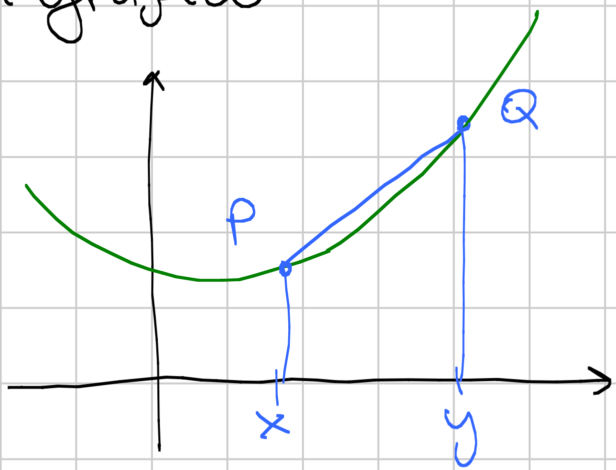
se esiste una costante $L \in \mathbb{R}$, detta cost. di LIPSCHITZ, tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R}$$

Interpretazione geom. in termini di grafico

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq L$$

coeff. angolare della retta PQ



Brutalmente: $f$ Lipschitziana $\Leftrightarrow$ le rette PQ non sono troppo pendenti

$\Updownarrow$

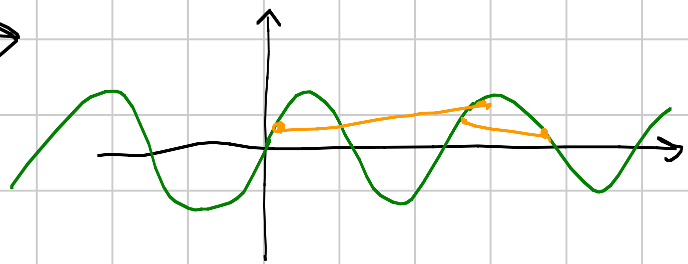
il grafico di $f$ non è troppo pendente.

Esempio 1 $f(x) = x^2$ è lip. su $\mathbb{R}$? NO


Non c'è un valore L che sia maggiore di tutti i coeff. angolari

Esempio 2 $f(x) = \sin x$ è lip. su $\mathbb{R}$

Sì, è lip. !!!



## Legame tra lipschitzianità e derivata prima

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile.

Allora $f$ è Lipschitziana in $\mathbb{R}$ $\iff$ esiste una costante $L$ t.c.

$$|f'(x)| \leq L \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Idem su un intervallo. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile. Allora

$f$ lipschitziana in $[a,b]$ $\iff$ esiste una costante $L$ t.c.

$$|f'(x)| \leq L \text{ per ogni } x \in [a,b].$$

Dim. della freccia $\Leftarrow$ Hp: $|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Tesi: $f$ lip. in $\mathbb{R}$

$$f(x)-f(y) = f'(\xi)(x-y) \qquad \text{LAGRANGE}$$

$$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)|\cdot|x-y| \leq L\,|x-y|$$

il che è equivalente a dire che $f$ è lip.

— o — o —

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\cos x)-\arctan(\cosh x)}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad \left[\frac{0}{0}\right]$$

Non posso usare gli sviluppi classici perché l'argomento di arctan non tende a zero.

Lo vedo come $\displaystyle \frac{f(\cos x)-f(\cosh x)}{x^2} = \frac{f'(\xi)\,(\cos x-\cosh x)}{x^2}$

$f'(1) = \frac{1}{2}$

$\cos x - \cosh x$ lo posso fare con Taylor

$\xrightarrow{} -1$

$$\frac{\cos x - \cos \xi x}{x^2} = \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} \to -1$$

$\xi$ è un illustre sconosciuto che sta fra $\cos x$ e $\cos \xi x$.
Quando $x \to 0$, $\cos x \to 1$ e $\cos \xi x \to 1$, quindi anche $\xi \to 1$

$$f(x) = \arctan x \; ; \; f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Disuguaglianze classiche}}$

$$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0 \qquad \log(1+x) \leq x \quad \forall x \geq 0$$

$$\arctan x \leq x \quad \forall x \geq 0 \qquad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0$$

$$e^x \geq 1 + x \quad \forall x \geq 0$$

$\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$

Considero la funzione

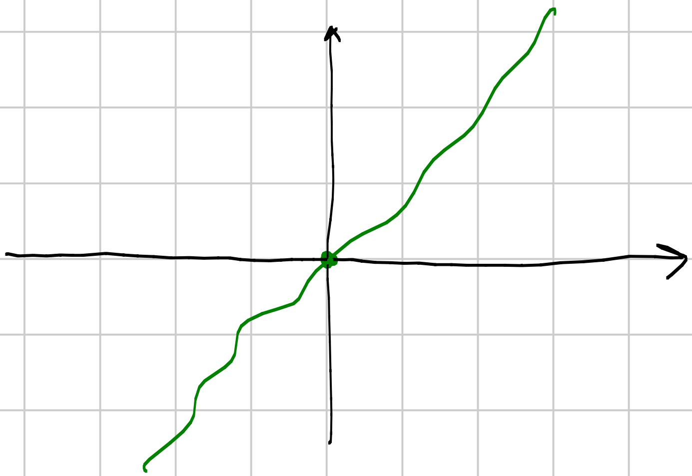
$$f(x) = x - \sin x$$

La disug. data è equivalente a dim. che $f(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0$

$f(0) = 0 \qquad f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ sempre e inoltre

$f'(x) = 0$ solo quando $\cos x = 1$, cioè sporadic.

Monotonia 3 $\Rightarrow$ $f(x)$ è strett. crescente su tutto $\mathbb{R}$



$\Rightarrow f(x) > 0$ per $x > 0 \qquad x > \sin x$

$f(0) = 0$

$f(x) < 0$ per $x < 0 \qquad x < \sin x$

$\arctan x \le x \quad \forall x \geq 0$ Considero la funzione

$$f(x) = x - \arctan x$$

$f(0)=0$, $\quad f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} \geq 0$

Inoltre $f'(x)=0 \iff x=0$

Monotonia 3 $\Rightarrow$ $f$ strett. cresc. (come sopra)

$f(x) > 0$ per $x>0$ $\qquad \arctan x < x$ per $x>0$

$f(x) < 0$ per $x<0$ $\qquad \arctan x > x$ per $x<0$