MAT I TLC

ORA 43

Titolo nota 08/11/2006

Teoremi sulle funzioni derivabili

$$\begin{array}{ccccccc} W & \Rightarrow & R & \Rightarrow & C & \Rightarrow & L \\ & & & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & & & H & & M \\ & & & & \Downarrow & & \\ & & & & T & & \end{array}$$

W : WEIERSTRASS
R : ROLLE
C : CAUCHY
L : LAGRANGE
H : DE L'HÔPITAL
T : TAYLOR
M : monotonia

W: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora max e min di f in $[a,b]$ esistono

$\boxed{\text{TEO. DI ROLLE}}$ Sia data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Ipotesi:

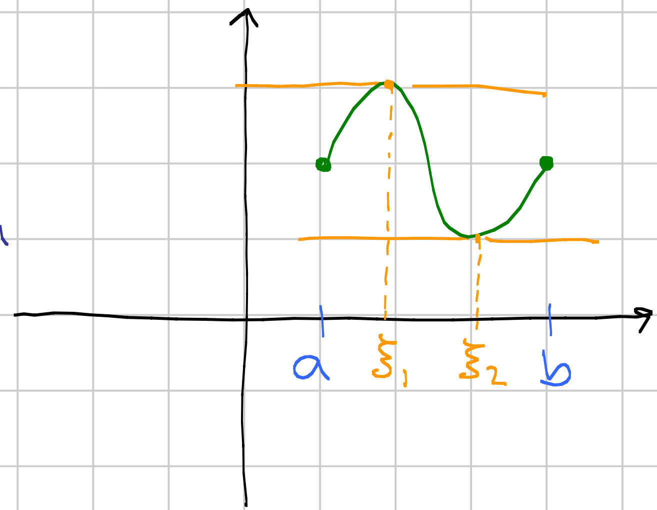
(i) f continua in $[a,b]$

(ii) f derivabile in (a,b) [se è derivabile in $[a,b]$ ancora meglio]

(iii) $f(a) = f(b)$

Tesi: $\exists\, \xi \in (a,b)$ tale che $f'(\xi) = 0$.

Oss. ξ non è obbligato ad essere unico



Dim.: per Weierstrass $f(x)$ ha max e min in $[a,b]$.

Sia x_0 un p.to di max o di min.

Abbiamo visto prec. che x_0 può essere

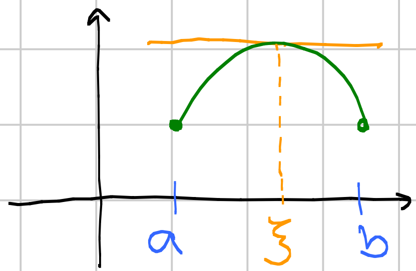
- stazionario interno: se è così abbiamo trovato un punto $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0)=0$

- singolare interno: per l'Hp (ii) questi non ci sono

- sul bordo e sarebbe un guaio.

Se almeno uno tra i pti di max e di min è interno, allora OK

Se invece i pti di max e min sono tutti sul bordo vuol dire che la funzione è costante, ma in questo caso $f'(x)=0$ in tutti i punti $x \in (a,b)$ (e in realtà tutto l'intervallo è fatto da punti di max e di min).



TEO. DI CAUCHY Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$

Ipotesi: (i) f e g continue in $[a,b]$

(ii) f e g derivabili in (a,b)

Tesi: esiste $\xi \in (a,b)$ t.c.

$$[f(b)-f(a)]\, g'(\xi) = [g(b)-g(a)]\, f'(\xi)$$

Se inoltre

(iii) $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in (a,b)$

allora $g(b) \neq g(a)$ e dividendo ottengo

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

Dim. Considero la seguente funzione

$$\varphi(x) = \underbrace{[f(b)-f(a)]}_{\text{numero}}\, g(x) - \underbrace{[g(b)-g(a)]}_{\text{numero}}\, f(x)$$

Proprietà di $\varphi(x)$: (i) φ è continua in $[a,b]$
(ii) φ è derivabile in (a,b)
(iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$ ← VERIFICA DA FARE

$$[f(b)-f(a)]\,g(a) - [g(b)-g(a)]\,f(a) \overset{?}{=} [f(b)-f(a)]\,g(b) - [g(b)-g(a)]\,f(b)$$

φ verifica le Hp di Rolle, quindi $\exists\, \xi \in (a,b)$ t.c. $\varphi'(\xi) = 0$

$$\varphi'(\xi) = [f(b)-f(a)]\,g'(\xi) - [g(b)-g(a)]\,f'(\xi) = 0$$ e questa è la prima tesi

Se in + supponiamo che $g'(x) \neq 0$ in (a,b) intanto possiamo dividere per $g'(\xi)$.
Per concludere mi serve solo dim. che $g(b) \neq g(a)$

Se infatti fosse $g(a) = g(b)$ potrei applicare Rolle a $g(x)$ e ottenere che $g'(x)$ si annulla da qualche parte, ma per Hp questo non accade.

— o — o —

TEO. LAGRANGE Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

Ipotesi: (i) f continua in $[a,b]$
(ii) f derivabile in (a,b)

Tesi: $\exists\, \xi \in (a,b)$ t.c. $\boxed{f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)}$

Dim. riscrivo la tesi nella forma $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{f'(\xi)}{1}$

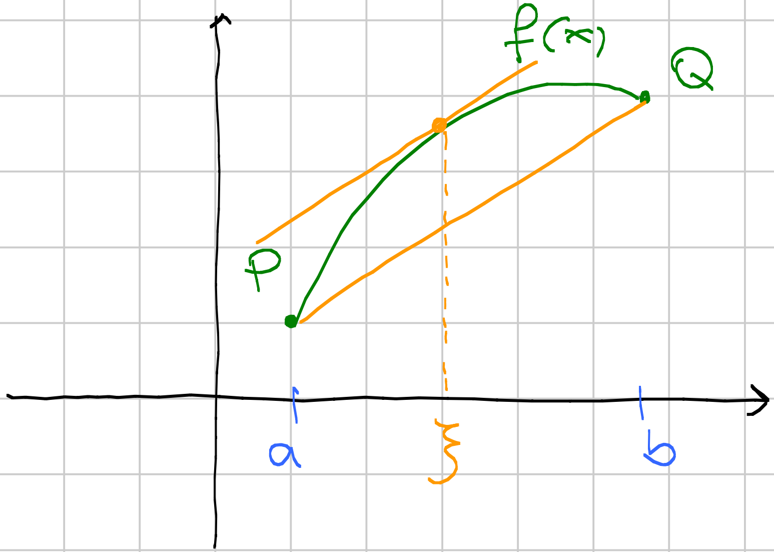
Questo ricorda il teo. di Cauchy con $g(x) = x$. Infatti

$g' \neq 0$ sempre

$$g(b) - g(a) = b - a \quad , \quad \boxed{g'(x) = 1} \Rightarrow g'(\xi) = 1$$

Quindi Lagrange è una conseguenza di Cauchy.

Interpretazione geometrica



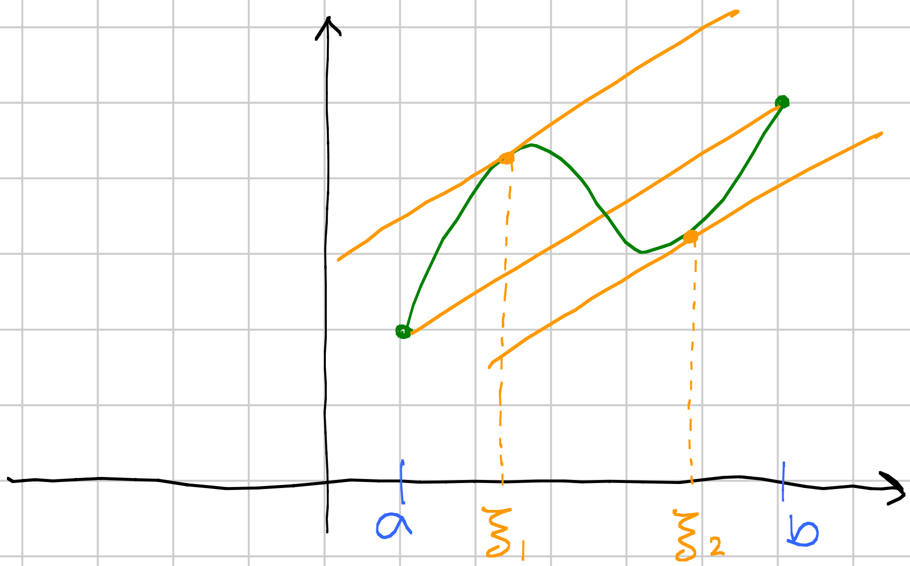
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = coeff. ang. retta PQ

$f'(\xi)$ = coeff. ang. retta tg nel p.to del grafico corr. a ξ

Lagrange geom. : c'è almeno un p.to $\xi \in (a,b)$ t.c. la tangente al grafico in $(\xi, f(\xi))$ è parallela alla retta PQ.

Dal punto di vista geom. Lagrange generalizza Rolle

<u>Oss.</u> Caso in cui ξ non è unico:



Dim. di un caso particolare di de L'Hôpital a partire da Cauchy

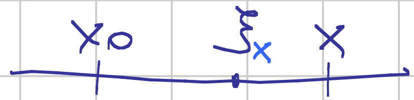
Caso particolare: $\displaystyle\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ della forma $\frac{0}{0}$

reale

Barando un po', posso far finta che sia $f(x_0) = g(x_0) = 0$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Ho tolto 0 sopra e sotto



Ovviamente per x diversi trovo ξ diversi

Quando $x \to x_0^+$, $\xi_x \to x_0^+$ per i carabinieri

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi_x \to x_0^+} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$$

Monotonia 1

Ipotesi: segno di f' in un punto

$f'(x_0) > 0 \implies f(x) > f(x_0)$ un po' a dx di x_0

$f(x) < f(x_0)$ un po' a sx di x_0

$f'(x_0) < 0 \implies$ ....

Monotonia 2

Ipotesi: segno di f' in un intervallo

Sia $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile.

1. $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b) \implies f$ strett. cresc. in (a,b)
2. $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \implies f$ deb. cresc. in (a,b)
3. f deb. cresc. in $(a,b) \implies f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$
4. f strett. cresc. in $(a,b) \implies f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a,b)$

NO! È FALSA

Esempio $(a,b)=(-1,1)$, $f(x)=x^3$

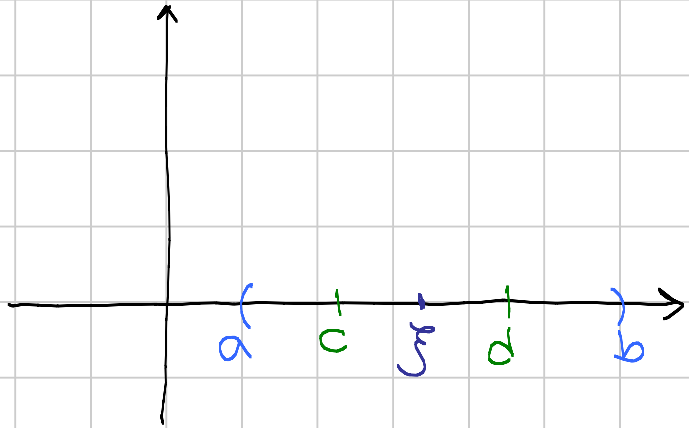
$f(x)$ è strett. crescente

$f'(x)=3x^2$ si annulla per $x=0$,

quindi $f'(x)$ non è strett. positiva

Dim. di ① e ②

Considero $a<c<d<b$



$$f(d)-f(c)=\underbrace{(d-c)}_{>0}\,\underbrace{f'(\xi)}_{\substack{>0 \ (\text{caso } 1) \\ \geq 0 \ (\text{caso } 2)}}$$

Nel caso ① ottengo $f(d)-f(c)>0$, cioè $f(d)>f(c)$

$\Rightarrow$ f strett. cresc.

Nel caso ② ottengo $f(d) - f(c) \geq 0$, cioè $f(d) \geq f(c)$

$\Rightarrow$ f deb. cresc.

Dim. di ③ Hp. f deb. crescente. Tesi $f'(x) \geq 0$ ovunque in (a,b)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$\rightarrow$ per $h > 0$ abbiamo denom > 0 e num. ≥ 0 perché f è deb. cresc.

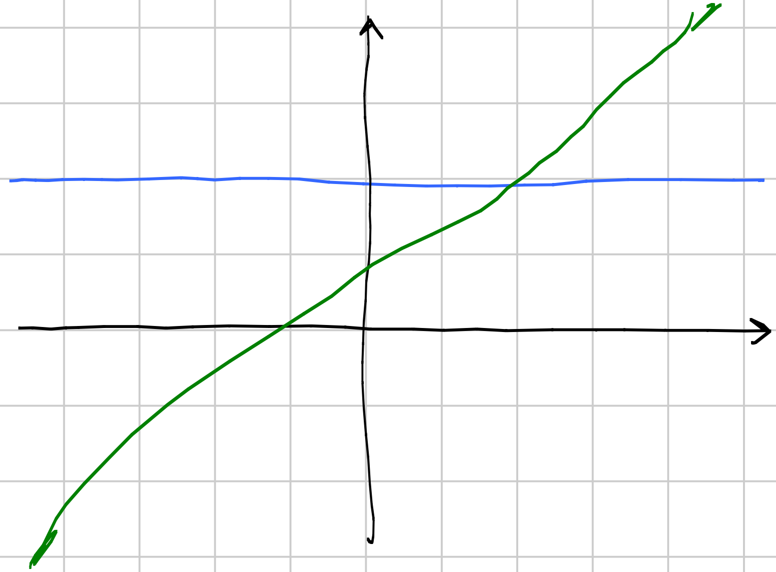
$\rightarrow$ per $h < 0$ abbiamo denom. < 0 e num. ≤ 0 perché f è deb. cresc.

In ogni caso la frazione è ≥ 0 ed il limite di roba ≥ 0 è ancora ≥ 0

Se provassi a dim. ④ in questo modo appena usato, avrei che la frazione è sempre > 0, ma il limite di roba > 0 può anche venire $= 0$ (le DISUGUAGLIANZE STRETTE NON passano al limite)

Esempio 1 Dimostrare che l'eq. $\boxed{x + e^x} = 2006$ ha esatta- mente una soluzione reale

$f(x)$



Dim. intanto che ha almeno 1 soluz.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ basta per concludere che $f(x)$ è SURGETTIVA

Per l'unicità calcoliamo $f'(x) = 1+e^x > 0$.

Per monotonia 2, $f(x)$ è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$,

dunque iniettiva, quindi al max 1 soluz.

In realtà abbiamo dimostrato che $f(x)$ vista come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è INIETTIVA e SURGETTIVA, dunque

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'eq. $f(x) = \lambda$ ha un'unica sol. reale

— o — o —

<u>Esempio 2</u>

$$\underbrace{\boxed{3x + \cos x}}_{f(x)} = 2006$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è surgettiva: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

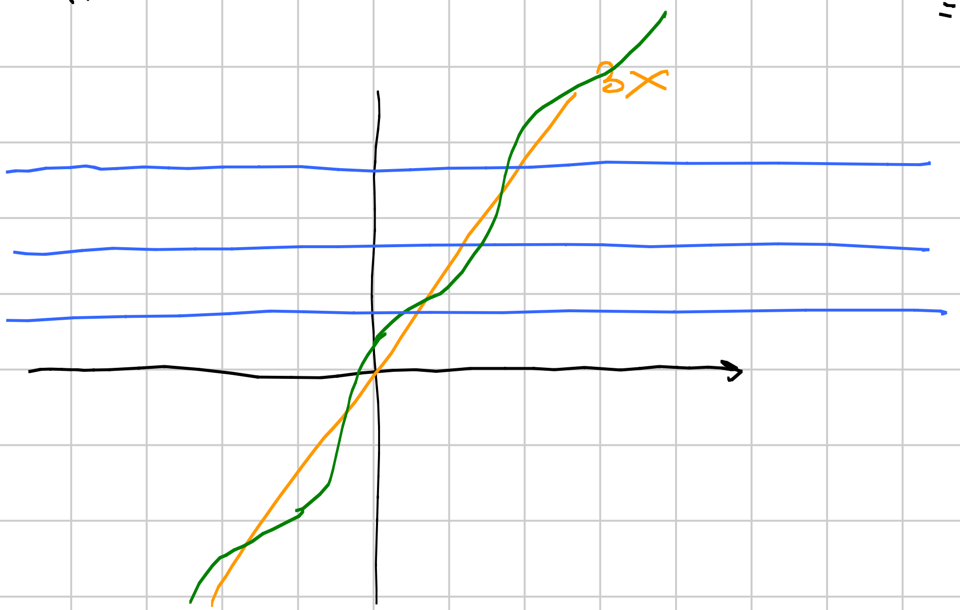
f continua + teo. esistenza degli zeri

Per l'iniettività calcoliamo $f'(x)$

$$f'(x) = 3 - \sin x \geq 2 > 0$$

$\Rightarrow$ per monotonia 2, $f(x)$ è strett. cresc. in $\mathbb{R}$, dunque iniettiva.

Quindi per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'eq. $3x + \cos x = \lambda$ ha esattamente una soluz. reale.



Esempio 3 $f(x) = x + \sin x$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f è surgettiva per il solito motivo (limiti per $x \to \pm\infty$)

$$f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \text{(ma può annullarsi)}$$

Monotonia ② $\Rightarrow$ f è DEBOLMENTE crescente, ma questo <u>non</u> basta per l'iniettività.

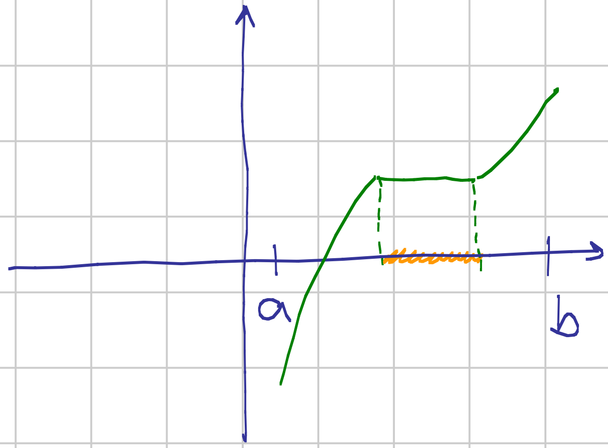
$\boxed{\text{MONOTONIA ③}}$ Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ continua e derivabile.

Supponiamo che $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$ e che non esista nessun intervallo contenuto in (a,b) in cui $f'(x)$ vale sempre 0.

Allora $f(x)$ è STRETT. CRESCENTE

$f'(x)$ si annulla SPORADICAMENTE

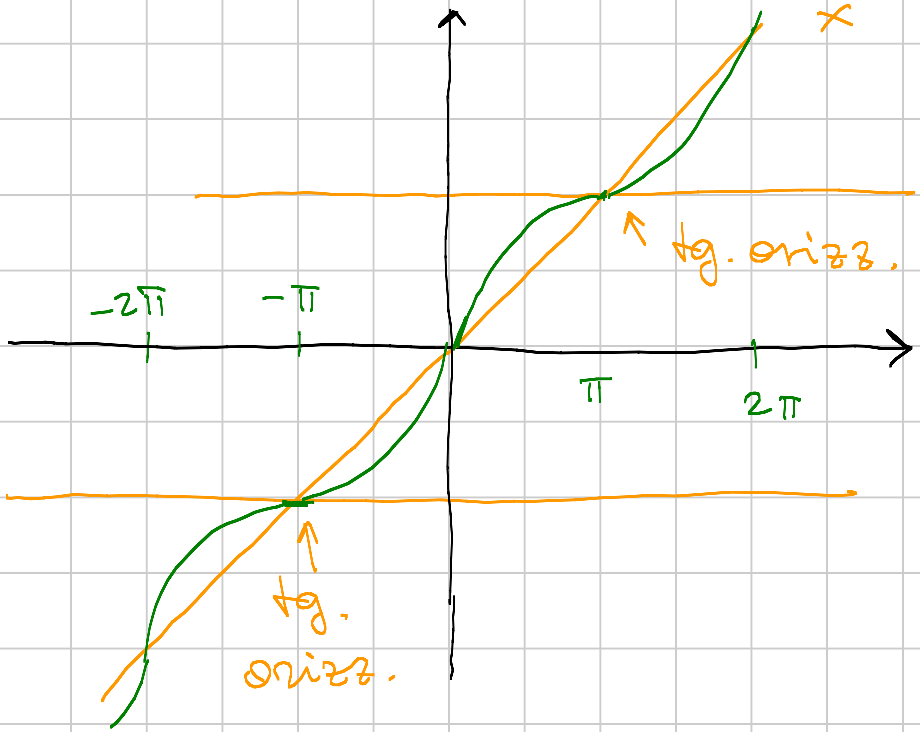
Dim. Per Monotonia (2) già sappiamo che $f(x)$ è DEB. cresc.
Supponiamo per assurdo che f non sia strett. cresc.
Ma allora f avrebbe dei tratti piatti
Ma allora ci sarebbe un intero intervallo in cui $f'(x)$ si annulla, cosa che abbiamo escluso per ipotesi



Tornando all'esempio 3 abbiamo che

$f'(x) = 1+\cos x \geq 0$ sempre e $f'(x)=0$ sporadicamente (solo per $x = \pi + 2k\pi$)

Per monotonia 3 segue che f è STRETT. CRESCENTE, dunque INIETTIVA



x
tg. orizz.
−2π
−π
π
2π
tg.
orizz.

MAT I TLC

ORA 45

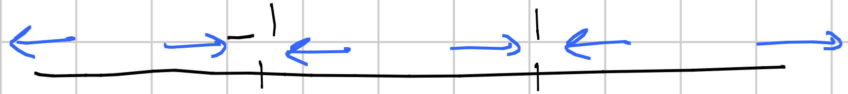
STUDIO GLOBALE DI FUNZIONI

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

1. SIMMETRIE : f è dispari

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-1} = \frac{-x}{x^2-1} = -f(x)$$

2. Per quali x ha senso (burocrazia) $x \neq \pm 1$
3. Per quali x è continua : per ogni $x \neq \pm 1$
4. Limiti agli estremi della zona di definizione



$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ $\longleftrightarrow$ $\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

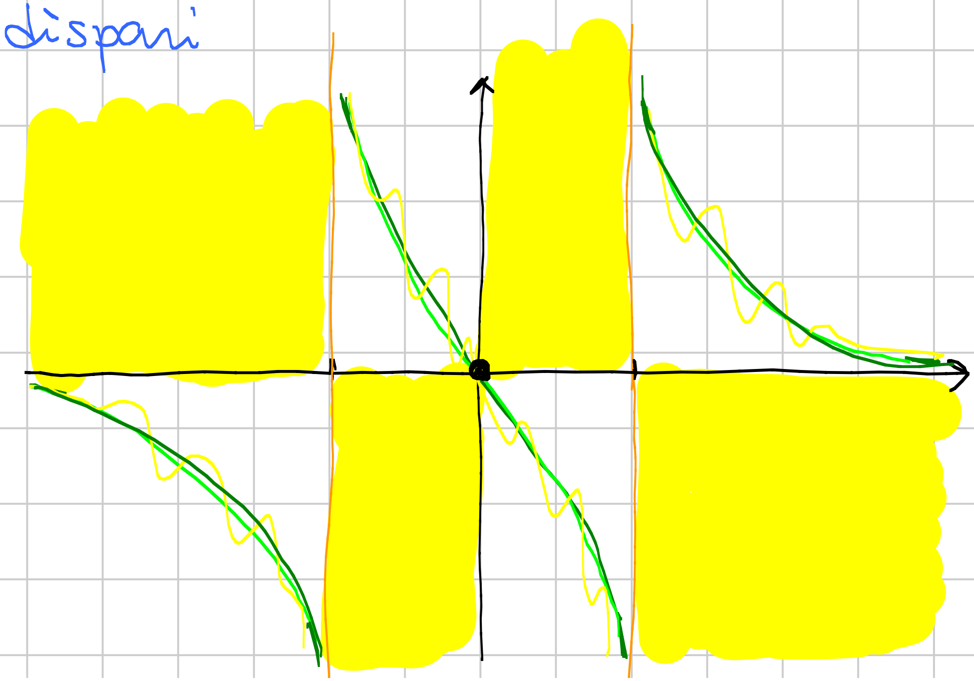
Quelli a dx sono quelli a sx cambiati di segno perché f è dispari

(5) $\boxed{\text{Zeri e segno}}$ Risolvere

l'eq. $f(x) = 0$ e le

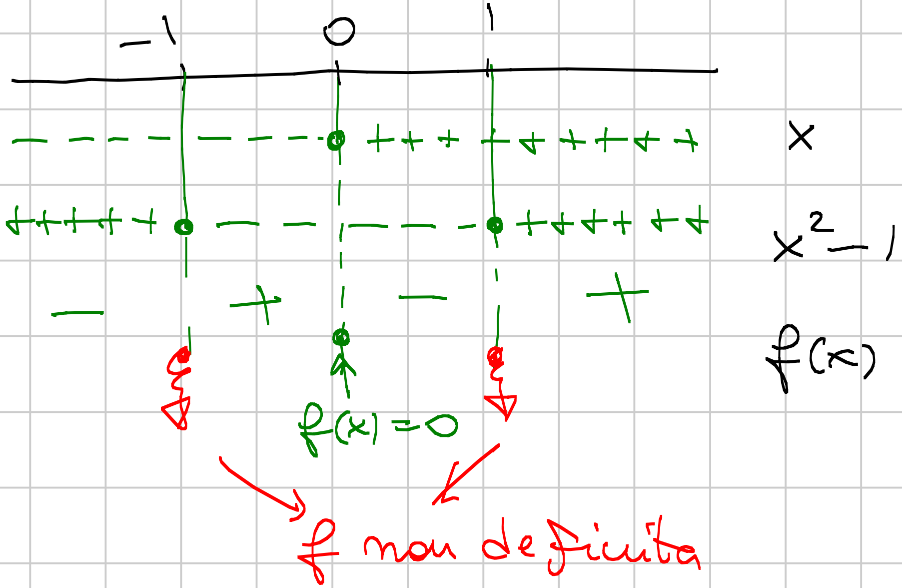
diseq. $f(x) > 0$

$f(x) < 0$



$$\frac{x}{x^2-1} = 0 \iff x = 0 \quad (\text{si annulla solo per } x = 0)$$

$$\frac{x}{x^2-1} > 0$$



$f(x) > 0 \iff x \in (-1, 0)$

oppure

$x > 1$

⑥ Per quali x è derivabile: per ogni $x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-2x\cdot x}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

⑦ Zeri e segno di $f'(x)$: risolvere l'eq. $f'(x) = 0$ e la diseq. $f'(x) > 0$

Nel nostro caso $f'(x) = 0$ MAI e $f'(x) < 0 \quad \forall x \neq \pm 1$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è strett. decrescente in ciascuno dei tratti dell'insieme di definizione

⑧ Punti di max / min locali e globali : NESSUNO

⑨ Asintoti $\rightarrow$ ORIZZ. $y = 0$

$\rightarrow$ VERT. $x = 1$ e $x = -1$

$\rightarrow$ OBLIQUI nessuno

— o — o —

ASINTOTI ORIZZ.

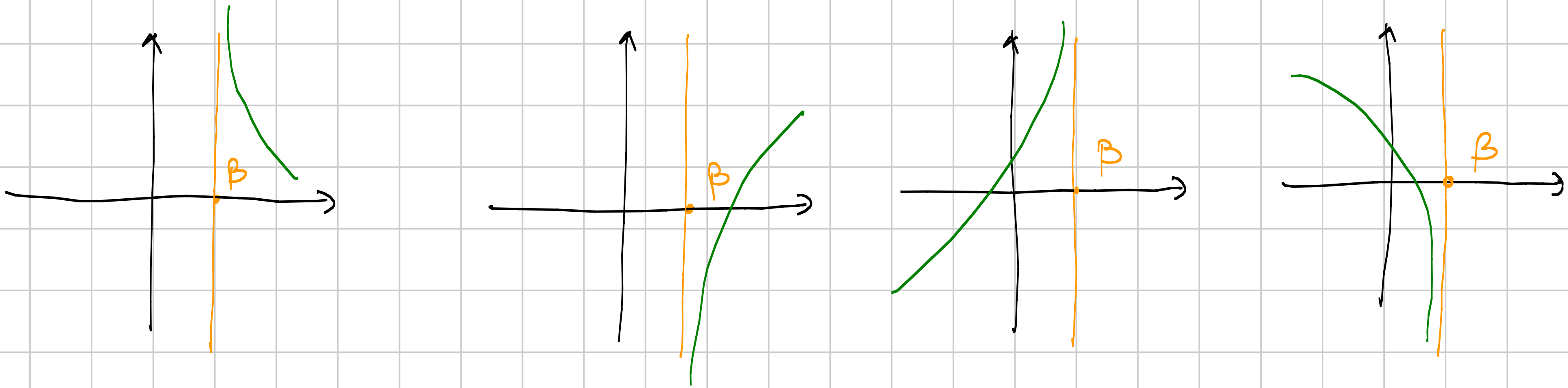
La retta $y = \alpha$ è asint. orizz. di $f(x)$ per $x \to +\infty$ $[-\infty]$ se

$$\lim_{x \to +\infty \, [-\infty]} f(x) = \alpha$$

ASINTOTI VERTICALI

La retta $x = \beta$ è asint. vert. di $f(x)$ se si ha <u>almeno</u> uno dei seguenti 4 limiti

$$\lim_{x \to \beta^+} f(x) = +\infty \; ; \quad \lim_{x \to \beta^+} f(x) = -\infty \; ; \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = +\infty \; ; \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = -\infty$$

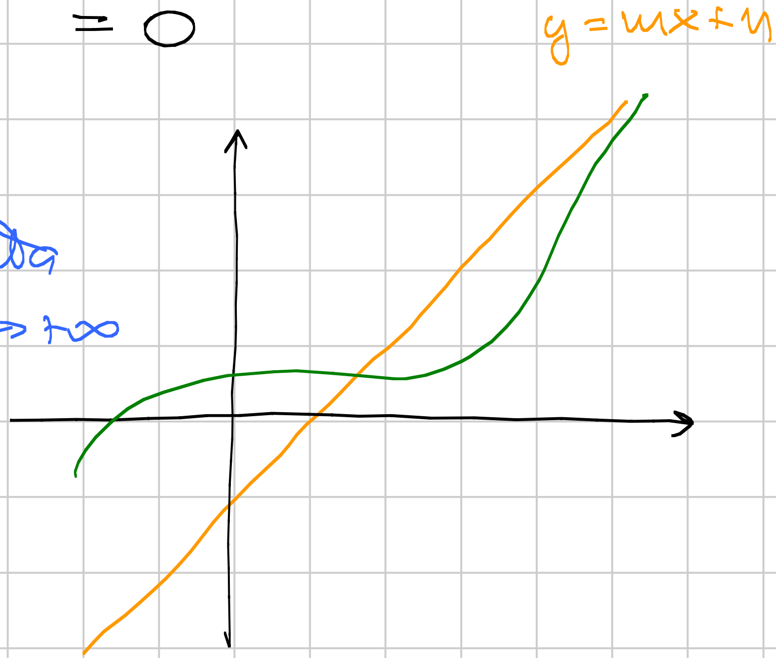


ASINTOTI OBLIQUI

Una retta $y = mx + n$ si dice asintoto obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$ [$x \to -\infty$] se

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ [x \to -\infty]}} \left[f(x) - mx - n \right] = 0$$

La differenza tra la funzione e la retta tende a zero per $x \to +\infty$



Criteri.

$y = mx + n$ è asint. obliquo di $f(x)$ per $x \to +\infty$

$$\Updownarrow$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx]$$

se questo è del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, con Hôpital mi riduco a calcolare $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ [occhio: potrebbe esistere il primo, ma non il 2°]

Dim criteri: Supponiamo che $y = mx + n$ sia asintoto, cioè che $f(x) - mx - n \longrightarrow 0$ per $x \to +\infty$

Allora $$\frac{f(x)}{x} = \underbrace{\boxed{\frac{f(x) - mx - n}{x}}}_{\frac{0}{\infty} = 0} + \underbrace{\boxed{\frac{mx + n}{x}}}_{m} \longrightarrow m$$

Analogamente

$$f(x) - mx = \underbrace{\boxed{f(x) - mx - n}}_{\to 0} + n \longrightarrow n$$

Viceversa: supponiamo che $\dfrac{f(x)}{x} \to m$; $f(x) - mx \to n$

Cosa posso dire del $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx - n]$?

$$f(x) - mx - n = \underbrace{\boxed{[f(x) - mx]}}_{n} \underbrace{- n}_{-n} \longrightarrow 0$$

Esempio 1

$$f(x) = \frac{x^2+7}{2x+1}$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+7}{2x^2+x} = \frac{1}{2}$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - mx \right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2+7}{2x+1} - \frac{1}{2}x \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x^2} + 14 - \cancel{2x^2} - x}{2(2x+1)} = -\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ La retta $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$
e anche per $x \to -\infty$

Esempio 2 $\quad f(x) = \log x + x$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log x + x}{x} = 1$$

$$n = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to +\infty} [\log x + \cancel{x} - \cancel{x}] = +\infty$$

$\Longrightarrow$ NO ASINTOTO OBLIQUO