MAT 1 TLC

$\boxed{\text{ORA 41}}$

Titolo nota 07/11/2006

Teo WEIERSTRASS $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Allora $\boxed{\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \{ f(x) : x \in [a,b] \}}$ esistono per FORZA

max / min valore assunto da $f(x)$ quando x varia in $[a,b]$ "sono delle y".

Poichè max esiste sarà il valore assunto da $f(x)$ in determinati p.ti $\in [a,b]$, detti p.ti di max ("delle x").

RICERCA DEI PUNTI DI MAX e DI MIN.

Teorema Supponiamo che $x_0 \in \boxed{(a,b)}$ sia p.to di max

e supponiamo che $f'(x_0)$ esista.

x_0 è interno all'intervallo

Allora $f'(x_0) = 0$.

Dim. Se $f'(x_0)$ non fosse 0, allora può essere >0 oppure <0.
Supponiamo che sia >0. Ma allora

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0.$$

Allora per permanenza del segno

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > 0$$

per h abbastanza vicini a 0,
cioè per ogni $h \in (-\delta, \delta)$
pur di prendere δ piccolo

Se la frazione è positiva vuol dire che num. e den. hanno lo stesso segno. Quindi

per $h \in (0, \delta)$ si ha $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$, cioè

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

Questo dice che "un po' a destra di x_0" la funzione vale più che in x_0 $\Rightarrow$ x_0 non è p.to di max.

Analogamente

per $h \in (-\delta, 0)$ si ha $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$ cioè

$$f(x_0+h) > f(x_0)$$

"un po' a sinistra di x_0" la funzione vale meno che in x_0

Supponiamo ora che sia $f'(x_0) < 0$. Allora per $h \in (-\delta, \delta)$ si ha che

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} < 0 \quad .$$

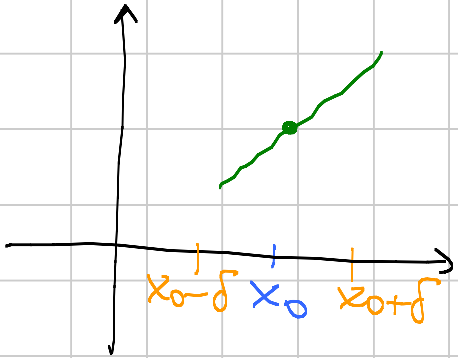
Quindi

- "un po' a destra di x_0" ($h \in (0,\delta)$) si ha $f(x_0+h) - f(x_0) < 0$, quindi $f(x_0+h) < f(x_0)$ "f vale meno"
- "un po' a sinistra di x_0" ($h \in (-\delta, 0)$) si ha $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ quindi $f(x_0+h) > f(x_0)$ "f vale più", quindi non può essere un p.to di max.

Non potendo essere $f'(x_0) > 0$, né $f'(x_0) < 0$ sarà per forza $f'(x_0) = 0$.

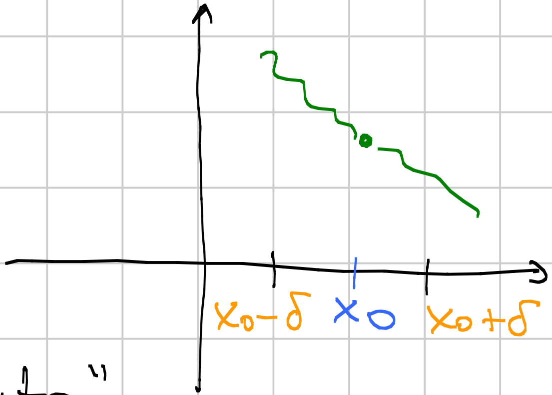
$\boxed{\text{MONOTONIA 1}}$ Se $f'(x_0) > 0$, allora

$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$
$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$$



Se $f'(x_0) < 0$, allora

$$f(x) > f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0-\delta, x_0)$$
$$f(x) < f(x_0) \qquad \forall x \in (x_0, x_0+\delta)$$



"Quanto è grande δ dipende dal punto"

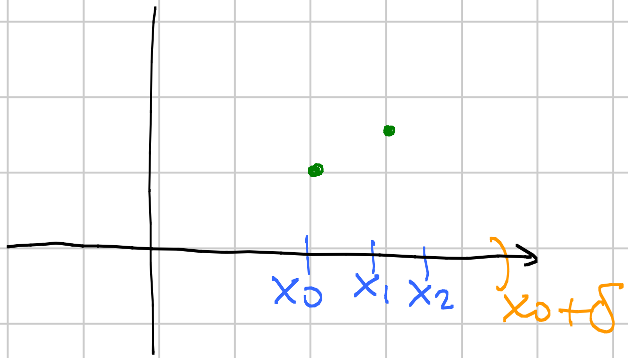
$\boxed{\text{CONSEGUENZA}}$ Se $x_0 \in (a,b)$ è un p.to di max / min, allora

$$f'(x_0) \begin{cases} = 0 \\ \text{N.E.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{OSSERVAZIONE}}$ Monotonia 1 non dice che

se $f'(x_0) > 0$, allora $f(x)$ è deb. cresc. in $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Monotonia 1 dice che $f(x_1) > f(x_0)$
e dice che $f(x_2) > f(x_0)$



Monotonia 1 non dice nulla sul + grande tra $f(x_1)$ e $f(x_2)$

$\boxed{\text{CONSEGUENZA}}$ Dove cercare i p.ti di max min?

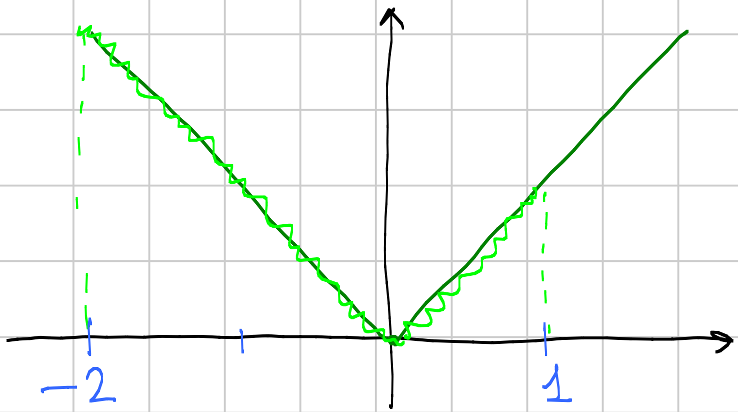
In 3 categorie di punti

1. Punti $x_0 \in (a,b)$ in cui $f'(x_0) = 0$ — STAZIONARI INTERNI
2. Punti $x_0 \in (a,b)$ in cui $f'(x_0)$ N.E. — SINGOLARI INTERNI
3. Sul bordo (quindi $x = a$ oppure $x = b$) — BORDO

Perché? Sia x_0 p.to di max (IDEM se x_0 p.to di min.)

- x_0
  - sul bordo $\rightsquigarrow$ 3
  - $x_0 \in (a,b)$
    - $f'(x_0)$ N.E. $\rightsquigarrow$ 2
    - $f'(x_0)$ esiste, ma allora per conseguenza di monot. 1 si ha $f'(x_0) = 0$ $\rightarrow$ 1

Esempio 1 $\quad \max\limits_{\min} \{ |x| \ ; \ x \in [-2, 1] \}$



Max = 2 , p.to di max : $\boxed{x = -2}$ BORDO

min = 0 , p.to di min : $\boxed{x = 0}$ SINGOLARE INTERNO

Non ci sono p.ti stazionari

Esempio 2 $\quad \max\limits_{\min} \{ x^3 - x \ : \ x \in [0, 1] \}$

Esistono per Weierstrass. Cerco i candidati ad essere p.ti di max / min

② Sing. interni : $\emptyset$ (la derivata esiste ovunque)

① Staz. interni : $f'(x) = 0$, $3x^2 - 1 = 0$, $x^2 = \frac{1}{3}$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ Solo $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ è interno a $(0,1)$

③ Bordo : $x = 0$ e $x = 1$.

Quindi ho 3 candidati ad essere pti di max / min

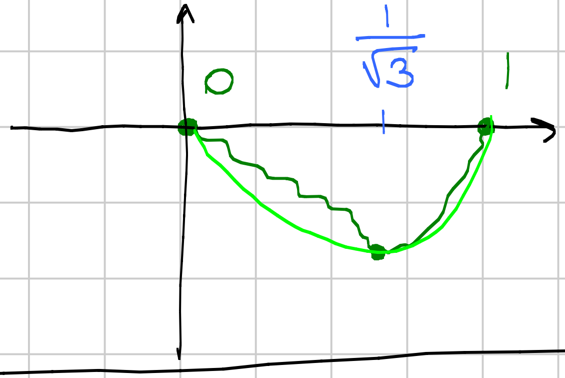
$x = 0$ $\quad f(0) = 0$

$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

$x = 1$ $\quad f(1) = 0$

Conclusione: $\max = 0$, p.ti di max: $x=0$ e $x=1$

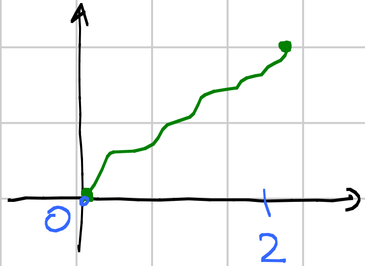
$\min = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$, p.to di min: $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$



Esempio 3

$$\max_{\min} \left\{ x e^x \; ; \; x \in [0,2] \right\}$$

Esistono per W.



(2) sing. interni: $\emptyset$

(3) $x=0$ e $x=2$

(1) staz. int. $f'(x)=0$; $e^x + xe^x = (x+1)e^x = 0 \iff x=-1$

$x=-1$ non è interno $\Rightarrow \emptyset$

$\boxed{x=0}$; $f(0) = \boxed{0}$ min

p.to min

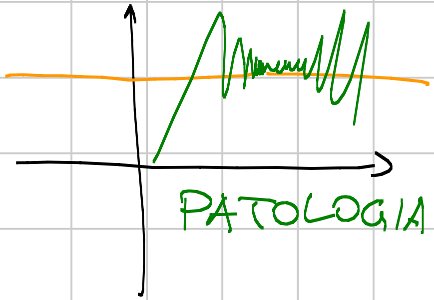
$\boxed{x=2}$; $f(2) = \boxed{2e^2}$ Max

p.to max

MAT 1 TLC

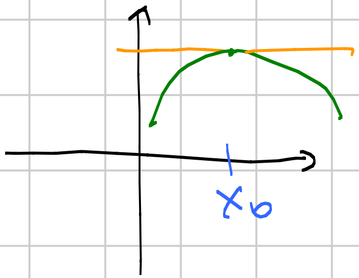
ORA 42

Studio LOCALE DI FUNZIONI

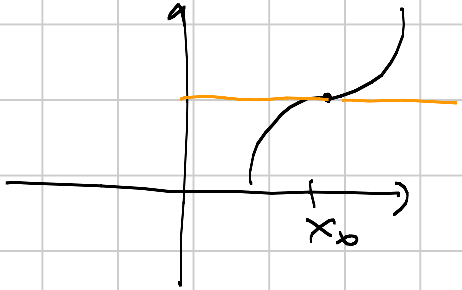


Cosa accade vicino ad un p.to stazionario?

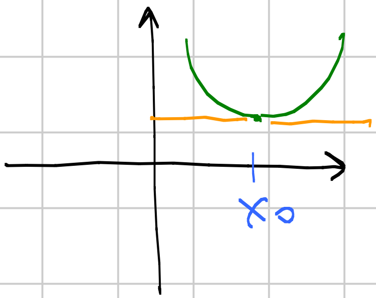
Supponiamo $f'(x_0)=0$.



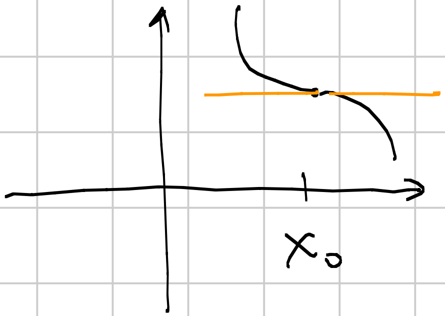
x_0 p.to di max loc.



x_0 p.to di flesso a tg. orizzontale crescente



x_0 p.to di min loc.



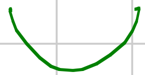
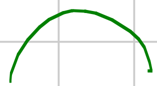
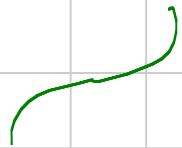
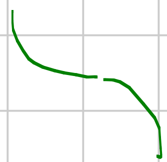
x_0 p.to di flesso a tg. orizz. decresc.

CRITERIO DELLE DERIVATE SUCCESSIVE

Supponiamo che $f'(x_0)=0$. Calcolo le derivate succ. in x_0 fino a quando ne trovo una $\neq 0$.

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

- $\boxed{n \text{ PARI}}$
  - $\to f^{(n)}(x_0) > 0$  MIN. LOC.
  - $\to f^{(n)}(x_0) < 0$  MAX. LOC.
- $\boxed{n \text{ DISPARI}}$
  - $\to f^{(n)}(x_0) > 0$ 
  - $\to f^{(n)}(x_0) < 0$ 

Dimostrazione di qualche caso particolare.

$x_0 = 0$, $n = 6$, $f^{(n)}(0) = \alpha > 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{f^{(6)}(0)}{6!} x^6 + o(x^6)$$

$$= f(0) + \frac{\alpha}{6!} x^6 + o(x^6)$$

i termini in mezzo non ci sono perchè $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(5)}(0) = 0$

Di conseguenza $f(x) - f(0) = \frac{\alpha}{6!} x^6 + o(x^6)$

Dividendo per x^6: $\frac{f(x) - f(0)}{x^6} = \frac{\alpha}{6!} + \boxed{\frac{o(x^6)}{x^6}} \to 0$ definiz. di $o(x^6)$

Faccio lim per $x \to 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^6} = \frac{\alpha}{6!} > 0$$

Di conseguenza la frazione è > 0 per ogni $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$
con δ suff. piccolo

Il den. è sempre > 0, quindi anche il num. sarà > 0 per $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$

Quindi $f(x) - f(0) > 0$ per $x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$

cioè $f(x) > f(0)$ $\forall x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$.

Quindi "vicino a 0" f vale di + che in $0 \Rightarrow$ min. loc.

Stesso discorso per tutte le potenze pari (Den sempre > 0).

Vediamo ora il caso $x_0 = 0$, $n = 7$, $f^{(7)}(0) = \alpha > 0$

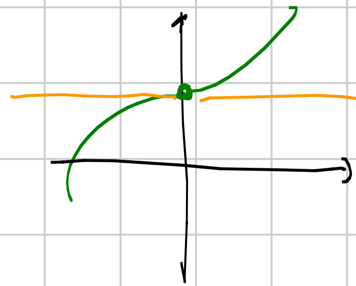
$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^7} = \frac{\alpha}{7!} > 0$$

Quindi la frazione è > 0 $\forall x \in (-\delta, \delta)$, $x \neq 0$

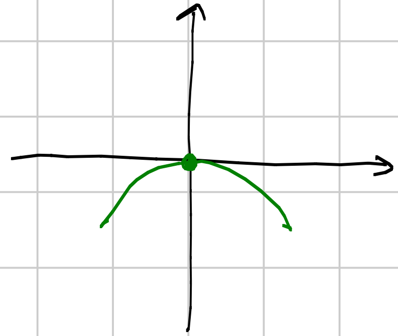
Per $x \in (0, \delta)$ Den $> 0 \Rightarrow$ Num $> 0 \Rightarrow f(x) > f(0)$

Per $x \in (-\delta, 0)$ Den $< 0 \Rightarrow$ Num. $< 0 \Rightarrow f(x) < f(0)$

$f(x)$ vale di + un po' a destra di $x = 0$
vale di − un po' a sinistra di $x = 0$



Altro modo di dire la stessa cosa: una funzione si comporta vicino ad $x=0$ come il primo termine non nullo (e non costante) del suo sviluppo di Taylor.



Esempio 1 $f(x) = x^4 - \sin x^2$ $\quad f(0)=0$

$$f(x) = \boxed{-x^2} + o(x^2)$$

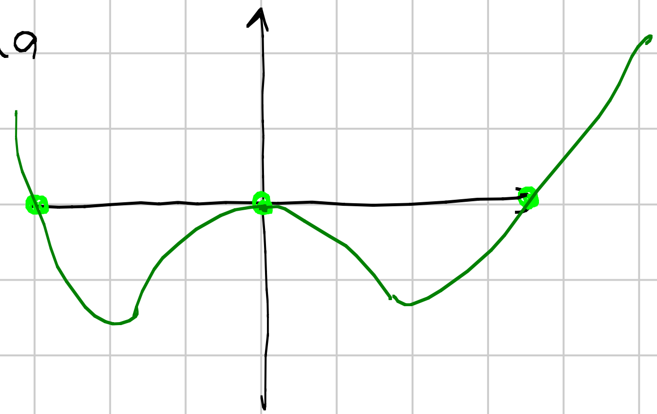
primo termine non nullo e non costante

$f(x)$ per x vicini a zero si comporta come $-x^2$

Esempio 2 Dim. che l'eq. $\underbrace{\boxed{x^4 - \sin x^2}}_{f(x)} = 0$ ha <u>almeno</u> 3 soluzioni reali.

Una soluzione è $x=0$

Studio loc. $\Rightarrow$ $f(x) < 0$ un po' prima e un po' dopo $x=0$



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Questo fa guadagnare una soluz. > 0 e una soluz. < 0

$$-\quad 0 \quad -$$

<u>Esempio 3</u> $\sin^2 x - \sin x^2$

$x=0$ non può essere p.to di flesso (f è PARI)

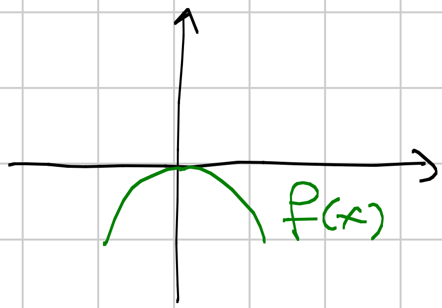
Cerco 1° termine non nullo in Taylor

DOPPIO PRODOTTO

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 - x^2 + o(x^4) = \cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} - \cancel{x^2} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

Quindi vicino a $x=0$ $f(x)$ si comporta come $-\frac{x^4}{3}$,
dunque $x=0$ è un p.to di max. loc.



$\boxed{\text{TERMINOLOGIA}}$ max / min locale / relativo

max / min globale / assoluto

$\boxed{\text{N.B.}}$ assoluto $\Rightarrow$ relativo

$f(x) = x^4$ ha un p.to di min. loc. per $x=0$ VERA
" " " " " glob. per $x=0$ VERA

Esempio 4

$$\underbrace{\boxed{\log(1+x^{100})}}_{= x^{100}+\dots} + \underbrace{\boxed{(\sin x^2)^{60}}}_{= x^{120}+\dots} - \underbrace{\boxed{\arctan x^{110}}}_{= x^{110}+\dots} = f(x)$$

$$f(x) = x^{100} + o(x^{100}) \Rightarrow \text{min loc. nell'origine}$$

Ripasso $\quad f(x) = \log(1+x^{100}) + \sin x^{120} - \arctan x^{110}$

Delle prime 500 derivate di $f(x)$, quante NON si annullano per $x=0$?

$$f(x) = x^{100} - \frac{x^{200}}{2} + \frac{x^{300}}{3} - \frac{x^{400}}{4} + \frac{x^{500}}{5} +$$

$$+ x^{120} - \frac{x^{360}}{6} - x^{110} + \frac{x^{330}}{3} + o(x^{500})$$

Questo vuol dire che gli unici termini con coeff. $\neq 0$ (fino al 500-esimo) sono quelli scritti.

Quindi sono solo 9.

<u>Esempio</u> Il coeff. di x^{350} sarebbe $\dfrac{f^{(350)}(0)}{350!}$

Il coeff. è $= 0 \Rightarrow f^{(350)}(0) = 0$

Il coeff. di x^{330} sarebbe $\dfrac{f^{(330)}(0)}{330!} = \dfrac{1}{3}$

Quindi $f^{(330)}(0) = \dfrac{330!}{3}$